9.1 System av differensialligninger

Vi ser på $\dot{y} = Ay$ (*) her $y = y(t)$

$y(0) = y_0$ initialbetingelse

Hvis $y(t) \in \mathbb{R}$, A er skalar og konstant mhp. t, da er $y(t) = e^{tA} y_0$ en løsning av (*) fordi

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} y(t) = A e^{tA} y_0 = A y(t).$$

Hvis A er en $n \times n$-matrise $A = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ der a_{ij} er konstanter mhp. t og $y(t) \in \mathbb{R}^n$ da er (*):

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \dots + a_{2n} y_n(t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= y_{01} \\ y_2(0) &= y_{02} \\ &\vdots \\ y_n(0) &= y_{0n} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y} = Ay$$

Dette er et lineært system av diff. lign. med konstante koeffisienter og vi skal løse det vha. lineær algebra (diagonalisering)

Merk: Hvis A er en diagonal matrise, dvs. $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ og $a_{ii} = d_i$, da er

$$(**)\quad \begin{array}{ll} \dot{y}_1 = d_1 y_1 & \\ \dot{y}_2 = d_2 y_2 & \\ \vdots & \\ \dot{y}_n = d_n y_n & \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{l} y_1(0) = y_{01} \\ y_2(0) = y_{02} \\ \vdots \\ y_n(0) = y_{0n} \end{array}$$

, løsningen er

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

$$y_1(t) = e^{td_1} y_{01}$$
$$y_2(t) = e^{td_2} y_{02}$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = e^{td_n} y_{0n}$$

Eksempel: $\dot{y}_1 = -3y_1 \quad y_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = e^{-3t}$

$\dot{y}_2 = y_2 \quad y_2(0) = \frac{1}{2} \qquad y_2(t) = \frac{1}{2} e^{t}$.

Når A ikke er diagonal, men diagonaliserbar kan man løse $\dot{y} = Ay$.

Anta at det finnes P inverterbar s.a. $P^{-1}AP = \underset{\text{diagonal}}{D}$.

Da er $A = PDP^{-1}$ og vi har

$$\begin{array}{l} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \dot{y} = PDP^{-1}y \\ y(0) = y_0 \end{array}$$

Variabelskifte: $v = P^{-1}y \quad (*)$

Merk: siden $A = (a_{ij})$, a_{ij} konstant mhp. t,

er $P = (p_{ij})$ p_{ij} ——"—— så

$$\dot{v}(t) = P^{-1}\dot{y}(t) = \underbrace{P^{-1}P}_{I} D \underbrace{P^{-1}y}_{v} = Dv$$

$$v(0) = P^{-1}y(0) = P^{-1}y_0$$

Vi har nå et nytt diff. lign. system $\begin{cases} \dot{v} = Dv \\ v(0) = P^{-1} y_0 \end{cases}$

som er på formen (**) og som løses på samme måten. Vi kan da finne:

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} v_{01} \\ \vdots \\ e^{d_n t} v_{0n} \end{pmatrix} \quad \text{der} \quad \begin{pmatrix} v_{01} \\ \vdots \\ v_{0n} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$$

For å finne $y(t)$ bruker vi * og da er $y(t) = Pv(t)$.

Eksempel:

$$\dot{y}_1 = 2y_3 \qquad y_1(0) = 1$$
$$\dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 - y_3 \qquad y_2(0) = 0$$
$$\dot{y}_3 = -y_1 - 3y_3 \qquad y_3(0) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A er diagonaliserbar (se kap. 7.2 s. 371)

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \quad \text{med} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da har vi (husk at $\dot{v} = Dv$)

$$\dot{v}_1 = -2v_1$$
$$\dot{v}_2 = -2v_2$$
$$\dot{v}_3 = -v_3$$

$$v(0) = P^{-1} y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Og løses av $v_1(t) = -e^{-2t}$

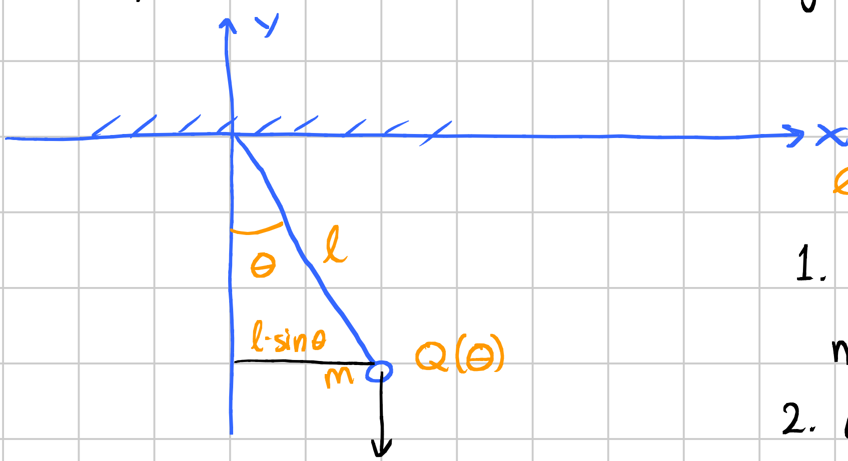
$v_2(t) = 0$

$v_3(t) = -2 \cdot e^{-t}$

som gir: $y(t) = Pv(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 0 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{-2t}+4e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ -e^{-2t}-2e^{-t} \end{pmatrix}}}$

Verifiser at $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, dvs. $\dot{y} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} - 4e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 2e^{-2t}+2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_3 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 \\ -y_1 - y_3 \end{pmatrix}$

<u>Eksempel</u>: Pendel, små osillasjoner.



Ønsker å finne $\theta(t)$.

1. Bruk fysikk til å finne en matematisk modell.
2. Lineariser modellen
3. Løs den lineære modellen.

1) $Q(\theta) = (l \cdot \sin\theta, -l \cdot \cos\theta)$

massen til kula er m.

Kraft på kula: $\vec{P} = (0, -mg)$

Newtons 2. Lov: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2} Q(\theta(t))$

$$\frac{d}{dt} Q(\theta(t)) = (l \cdot \cos\theta \cdot \dot\theta \, , \, l \cdot \sin\theta \cdot \dot\theta)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} Q(\theta(t)) = (-l \cdot \sin\theta \cdot \dot\theta^2 + l \cdot \cos\theta \cdot \ddot\theta \, , \, l\cos\theta \cdot \dot\theta^2 + l \cdot \sin\theta \cdot \ddot\theta)$$

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &m(-l\sin\theta \cdot \dot\theta^2 + l\cos\theta \cdot \ddot\theta) = 0 \quad (\mathrm{I}) \\ &\cancel{m}(l\cos\theta \cdot \dot\theta^2 + l\sin\theta \cdot \ddot\theta) = -\cancel{m}g \quad (\mathrm{II}) \end{aligned}\right\}$$

fra I): $\sin\theta \cdot \dot\theta^2 = \cos\theta \cdot \ddot\theta$

II $\cdot \frac{\sin\theta}{l}$: $\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \dot\theta^2 + \sin^2\theta \cdot \ddot\theta = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$

I innsatt i II: $\cos^2\theta \cdot \ddot\theta + \sin^2\theta \cdot \ddot\theta = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\ddot\theta = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$$

Diff. lign. som beskriver pendelens bevegelse

2. Linearisering

Når $\theta \ll 1$ kan vi bruke Taylorrekka til sinus om 0:

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

Da får vi $\ddot\theta = -\frac{g}{l}\theta$ Lineær 2. ordens diff.lign. med konstante koeff.

3. La $\omega = \dot\theta$, da er $\dot\omega = \ddot\theta$. Vi får et 1. ordens system. (ω er vinkelhastighet)

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\cdot\theta$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{\ell} & 0\end{bmatrix}}_{A = PDP^{-1}} \begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

Vi kan bestemme at ved $t=0$: $\theta(0) = \theta_0 = 0.5$ og $\omega(0) = 0$.

$g = 9.8\ m/s^2$ $\quad \ell = 0{,}1\ m$ $\quad t \in [0,1]$

Det gir oss
$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -98 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

Vi må diagonalisere $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -98 & 0\end{pmatrix}$.

Finner egenverdiene: $\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 98 & \lambda\end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 98 = 0$

$i = \sqrt{-1}$ $\quad \lambda_1 = i\sqrt{98}\ ,\ \lambda_2 = -i\sqrt{98}$

Tilhørende egenrom:

$\lambda_1 = i\sqrt{98}$: $\begin{pmatrix}i\sqrt{98} & -1\\ 98 & i\sqrt{98}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, generell løsn. $s\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{98}\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -i\sqrt{98}$ $\begin{pmatrix}-i\sqrt{98} & -1\\ 98 & -i\sqrt{98}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, generell løsn. $r\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{98}\end{pmatrix}$

Da er $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ i\sqrt{98} & -i\sqrt{98}\end{pmatrix}$.

Beregner P^{-1} ved å ta $I = P^{-1}P$: $\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ i\sqrt{98} & -i\sqrt{98}\end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\alpha + i\beta\sqrt{98} = 1 \qquad \alpha = \tfrac{1}{2} \qquad \beta = -\frac{i}{2}\frac{\sqrt{98}}{98}$$
$$\alpha - i\beta\sqrt{98} = 0$$
$$\gamma + i\delta\sqrt{98} = 0 \qquad \gamma = \tfrac{1}{2} \qquad \delta = \frac{i}{2}\frac{\sqrt{98}}{98}$$
$$\gamma - i\delta\sqrt{98} = 1$$

Så $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{98}}{98} \\ 1 & \frac{i\sqrt{98}}{98} \end{pmatrix}$ kan verifisere at $P^{-1}AP = D$

Variabelskifte: $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{u} = i\sqrt{98}\,u \\ \dot{w} = -i\sqrt{98}\,w \end{array}$ $\dot{v} = Dv$

Initialbet.

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \theta(0) \\ \omega(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{98}}{98} \\ 1 & \frac{i\sqrt{98}}{98} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \tfrac{1}{4}e^{ti\sqrt{98}}$$

$$w(t) = \tfrac{1}{4}e^{-ti\sqrt{98}}$$

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{98} & -i\sqrt{98} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ti\sqrt{98}} \\ e^{-ti\sqrt{98}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{ti\sqrt{98}} + e^{-ti\sqrt{98}} \\ i\sqrt{98}\left(e^{ti\sqrt{98}} - e^{-ti\sqrt{98}}\right) \end{pmatrix}$$

Oppskrift

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{y} = Ay \quad \text{og} \quad y(0) = y_0 \\ \dot{y} = PDP^{-1}y \\ P^{-1}\dot{y} = DP^{-1}y \\ v = P^{-1}y \;,\; \dot{v} = P^{-1}\dot{y} \\ \dot{v} = Dv \quad \text{og} \quad v(0) = P^{-1}y_0 \\ \text{Finn } v(t) \text{ og beregn så} \\ y(t) = Pv(t) \end{array}}$$

Bruker $e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$ og får

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\cos\left(t\sqrt{98}\right)$$ ← svaret ☺

$$\omega(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{98}\,\sin\left(t\sqrt{98}\right)$$