



HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

9.4 Fourier-rekker

Det er mulig å tilnærme mer kompliserte funksjoner med enklere funksjoner. Dette gir mange praktiske fordeler og brukes mye i ingeniørvitenskapen.

Gitt en funksjon over et intervall, hvordan finner vi den beste tilnærmingen?

Vi må velge hva disse "enkle" tilnærmingsfunksjonene skal være.

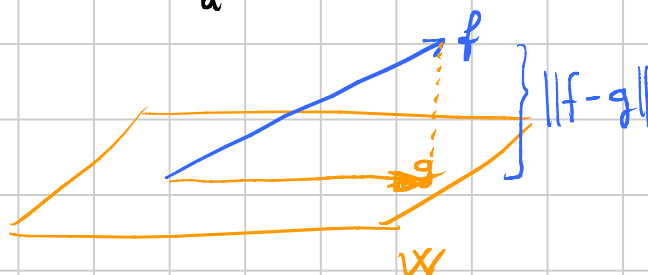
Vi må også angi hva "beste" tilnærming vil si. Hvordan skal vi måle feilen i forhold til den originale funksjonen?

Her kan vi bruke teorien om minste kvadraters metode og projeksjoner.

La $f \in C[a, b]$ (kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$) og la W være et endeligdimensjonalt underrom av $C[a, b]$, med indreprodukt $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

Vi vil finne $g \in W$ s-a

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \quad \text{er minst mulig.}$$



For å finne løsningen bruker vi "Beste approksimasjons-teorem" (6.4-1) som sier at den ortogonale projeksjonen av f på W er elementene i W som har minst avstand fra f .

Dvs. g som løser problemet er $g = \text{proj}_W f$ en slik g kalles også minste kvadraters approksimasjon av f i W .

FOURIER-REKKE

Vi ser nå på spesielle underrom av $C[0, 2\pi]$
ved å betrakte



HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$$

$$g_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad g_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \quad g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

$g_0, g_1, \dots, g_{2n}$ er lineært uavhengige og de er en
ortonormal mengde i $C[0, 2\pi]$ (kan verifiseres som
oppgave)

$$\langle g_0, g_1 \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos x \, dx = 0$$

$W = \text{span} \{g_0, g_1, \dots, g_{2n}\}$, $g_0, g_1, \dots, g_{2n}$ er en
ortonormal basis for W .

Elementene i W er av type

$$t(x) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \dots + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\pi}} \cos nx \\ + \frac{\mu_1}{\sqrt{\pi}} \sin x + \dots + \frac{\mu_n}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + \dots + c_n \cos nx \\ + d_1 \sin x + \dots + d_n \sin nx$$

$t(x)$ kalles et trigonometrisk polynom av orden n , ($d_n \neq 0 \vee c_n \neq 0$)

Vi vil nå finne minste kvadraters approksimasjon av $f \in C[0, 2\pi]$ på W . Vi vet at $g = \text{proj}_W f$ er en slik og: (Teorem 6.3.5)

$$g = \text{proj}_W f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_{2n} \rangle g_{2n}$$

Vi bruker følgende notasjon

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle f, g_0 \rangle, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_1 \rangle, \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_n \rangle$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{n+1} \rangle, \quad \dots \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{2n} \rangle$$

$$\text{Da har vi } \text{proj}_W(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx$$

$$+ b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx$$

Projeksjonen til f på W er skrevet som et trigonometrisk polynom der

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle f, g_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

$\vdots$

$$a_n = \dots = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx$$

⋮

$$b_n = \dots = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ kalles **Fourierkoeffisientene til f** .

Eksempel Gitt $f(x) = x$ på $[0, 2\pi]$. Finn minste kvadraters approssimasjon til f med et trigonometrisk polynom av orden n eller mindre.

Løsning: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = 2\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx \, dx \stackrel{\text{delvis integrasjon}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx \, dx \right)$$

$\uparrow$
 $k = 1, \dots, n$

$$= 0 + \frac{1}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi k^2} (1 - 1) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{k} \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx \right)$$

$$= -\frac{2\pi}{k\pi} \underbrace{\cos 2\pi k}_1 + 0 - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$= -\frac{2}{k}$$

$$X \approx \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx]$$

$$X \approx \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right)$$

□

Generelt har vi

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Man kan bevise at feilen $\|f - t_n\| \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$,
og man kan skrive

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourierrekke av f på $[0, 2\pi]$