

Mars 2004

**EKSAMENSOPPGAVER I MA1202
LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER**

(TIDLIGERE MNFMA108 LINEÆR ALGEBRA)

FRA VÅR 1995 – TIL VÅR 2003



NTNU
*Institutt for matematiske fag,
Gløshaugen*

Oppgave 1

- a) Finn den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- b) La N være matrisen

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn rang og nullitet av N

- c) Finn en basis for Null (N).

Oppgave 2

- a) La $Q(x, y) = 7x^2 + 3y^2 - 2xy$.

Avgjør hva slags kurve $Q(x, y) = 1$ er. Begrunn svaret.



- b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 3

Finn ligningen $y = ax + b$ som best approksimerer – i henhold til minste kvadraters metode – følgende datapunkter $(x_i, y_i) : (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$.

Oppgave 4

La t være et reelt tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Drøft hvordan rang (A_t) varierer med t .

- b) For hvilke t har likningssystemet

$$A_t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

- (i) nøyaktig en løsning,

- (ii) ingen løsning,

- (iii) uendelig mange løsninger.

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene til A og en basis for $\mathbb{C}^2$ som diagonaliserer A .

Oppgave 6

La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ være en lineært uavhengig mengde i et vektorrom V . Vis at da er også

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3\}$$

lineært uavhengig.



Faglig kontakt under eksamen:
Christian F. Skau
Telefon: 73 59 17 55

MNFMA 108, Lineær Algebra
Bokmål
Fredag 31.mai 2002
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.
Sensur: Fredag 21.juni 2002

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er oppgitt at B er rad-ekvivalent ("row equivalent") til A .

- Finn rang (A) og $\dim(\text{Null}(A))$. Hva er $\dim(R(A))$, der $R(A) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^5\}$?
- Finn basiser for henholdsvis radrommet, kolonnerommet og nullrommet til A .

Oppgave 2

La $V \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

- Finn en ortonormal basis for V .
- Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$, der de to første basiselementene er de du fant i a).

c) Finn den beste approksimasjonen til $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i V .

Oppgave 3

Som et miljøtiltak har Trondheim kommune utplassert 350 sykler til gratis utleie på tre steder i byen: i sentrum (A), i øst (B) og i vest (C). Syklene kan lånes fra tidlig om morgenen mot en viss sum, som fås tilbake ved tilbakelevering innen samme kveld. Etter en prøveperiode har man erfart at syklene utlånt om morgenen fra (A) leveres tilbake om kvelden etter følgende mønster: 80% til (A), 10% til (B) og 10% til (C). Tilbakeleveringsprosentene fra (B) er: 30% til (A), 60% til (B) og 10% til (C), mens de fra (C) er: 30% til (A), 10% til (B) og 60% til (C). For enkelthets skyld antar vi at dette mønsteret gjentar seg dag etter dag, at alle sykler blir utlånt hver morgen og at ingen sykler blir stjålet.

- En morgen viser det seg at de utplasserte syklene fordeler seg slik: 180 i (A), 85 i (B) og 85 i (C). Finn hvordan syklene var fordelt om morgenen dagen før.
- I det lange løp vil den prosentvise fordelingen (morgen eller kveld) av syklene mellom (A), (B) og (C) nærme seg en bestemt "likevekts"-fordeling, uansett hvordan fordelingen var i utgangspunktet. Begrunn denne påstanden ved å uttrykke den i et matematisk språk og ved å nevne hvilket resultat fra teorien som den bygger på. Bestem deretter hvordan syklene vil tilnærmelsesvis fordele seg mellom (A), (B) og (C) i det lange løp.

Oppgave 4

- La $Q(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$. Avgjør hva slags kurve $Q(x, y) = 1$ er. Begrunn svaret.
- Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 5

a) La P være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vis at P er invertibel og finn P^{-1} .

- b) For hvert reelt tall t , la A_t være matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t^2 + 6 \end{bmatrix}.$$
 Drøft hvordan rang (A_t) varierer med t , og angi for hver t en basis for kolonnerommet til A_t som består av kolonnevektorer til A_t .



Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Aslak Bakke Buan
Telefon: 5 02 89

MNFMA108, Lineær algebra

Bokmål

Tirsdag 27. november 2001

Kl. 9-15

Hjelpemidler: Utdelt kalkulator

Sensur: 18. desember 2001

Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1

La $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & a & 3 \end{pmatrix}$, der a er et reelt tall.

- Bestem determinanten til M . For hvilke verdier av a er M inverterbar?
- Finn nullrommet til M for alle forskjellige verdier av a ?
- Hva er rangen til M for alle forskjellige verdier av a ?
- La $a = 3$. Finn den inverse matrisa M^{-1} , og løs likningsettet

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La $a = 1$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}MP$ er en diagonal matrise.

Oppgave 2

Gitt tre punkter i planet (x_1, y_1) , (x_2, y_2) og (x_3, y_3) , som ikke ligger på en rett linje. Da finnes en unik sirkel gjennom punktene, med likning

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0.$$

- Finn en 4×4 -matrise A slik at $\det A = 0$ gir oss likningen for sirkelen, der $\det A$ betegner determinanten til A .
- Bruk a) til å finne sirkelen gjennom punktene $(2, 6)$, $(2, 0)$ og $(5, 3)$.

Oppgave 3

La V være vektorrommet av alle polynomer på formen $f(x) = a + bx^2$, der a, b er reelle tall.

- Vis at dette er et underrom av P_2 , rommet av alle polynomer av grad høyst to (med reelle koeffisienter), og finn en basis for V .

La $T: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ være funksjonen gitt ved

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

- Vis at T er en en-tydig (injektiv) lineær-transformasjon.

- Vis at

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

gir et indreprodukt på P_2 , mens

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

ikke gir et indreprodukt på P_2 . Vil

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

gi et indreprodukt på V ?

- Finn en ortonormal basis for rommet V med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Oppgave 4

- a) Hva vil det si at en matrise er diagonaliserbar? Hva vil det si at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar?

La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ være en symmetrisk matrise der a, b og c er reelle tall. Anta at A bare har positive egenverdier.

- b) Vis først at $\det A > 0$. Bruk så dette, samt at A har (minst) en positiv egenverdi til å vise at $a > 0$.

- c) Bruk resultatene fra b) til å vise følgende: Det finnes en unik reell matrise

$$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

med $x, z > 0$ slik at $A = LL^T$, der L^T er den transponerte matrisen til L .



Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA108 LINEÆR ALGEBRA

Bokmål

Fredag 1. juni 2001

Kl. 09.00 - 15.00

Sensur: Fredag 22. juni 2001

Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.

Oppgave 1

La a og d være reelle tall og betrakt matrisa $M_{a,d}$ gitt ved

$$M_{a,d} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

$$La P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Finn $P^{-1} M_{a,d} P$?
- Finn betingelsen på a og d slik at rangen til $M_{a,d}$ er 4.
Hvilke verdier vil rangen til $M_{a,d}$ og nulliteten til $M_{a,d}$ anta?

Oppgave 2

La r være et naturlig tall ($r \in \{1, 2, 3, \dots\}$)

Betrakt matrisa

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og la}$$

$$T_r = -(E_r^{-1})^T E_r.$$

- Regn ut og verifiser at

$$T_r = \begin{pmatrix} -1 & r \\ -r & r^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

- Avgjør for hvilke r matrisen T_r kan diagonaliseres som reell matrise.

Oppgave 3

Betrakt indreproduktrommet $\mathbb{R}^3$, med vanlig prikkprodukt.

$$La v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess til å finne w_2 og w_3 slik at $\{v_1, w_2, w_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.
- Finn matrisa $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2v_1v_1^T \right]$ der $v_1v_1^T$ er vanlig matrisemultiplikasjon der v_1 oppfattes som en 3×1 -matrise. Vis at v_1, w_2 og w_3 fra del a) av oppgaven er egenvektorer til denne matrisen.
- La u være en vektor i $\mathbb{R}^3$ med $\|u\| = 1$. Forklar hvorfor $I - 2uu^T$ er matrisa til lineærtransformasjonen en får ved å speile i planet normalt på u der I er 3×3 -identitetsmatrisen og u oppfattes som en 3×1 -matrise.

Oppgave 4

Anta at vi har observert en barkebillebestand av hunnbiller i et område. Etter at bestanden er delt inn i tre aldersgrupper fremkommer følgende data, der bare hunnbiller teller med i alle tall.

Aldersgruppe 1 gjenføder ingen mens 90 % fra aldersgruppe 1 overlever til aldersgruppe 2. Fra aldersgruppe 2 får halvparten ett avkom og 11 av 15 overlever til tredje aldersgruppe. I tredje aldersgruppe får 5 av 6 ett avkom mens alle i tredje aldersgruppe dør ut i løpet av denne perioden.

- a) Skriv ned Leslie-matrisen til populasjonen over.
- b) Finn egenverdiene til denne matrisen (en reell og to ikkereelle) og vis at de ikkereelle egenverdiene har absoluttverdi mindre enn 1.
- c) Finn egenvektoren tilhørende den reelle egenverdien og forklar hva som skjer i det lange løp dersom trenden ved observasjonen fortsetter?

Oppgave 5

La V og W være vektorrom og $f: V \rightarrow W$ en lineærbildning.

- a) Vis at dersom $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ er en basis for V så er bildet til f lik $\text{lin span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$, vektorunderrommet av W utspant av $f(v_1), \dots, f(v_n)$.
- b) Vis at dersom $\{w_1, \dots, w_m\}$ er lineært uavhengig i bildet til f og $u_1, \dots, u_m$ i V er valgt slik at $f(u_i) = w_i$ så er $\{u_1, \dots, u_m\}$ lineært uavhengig i V .



Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Inger Heidi Slungård
Telefon: 735 91880

MNFMA108. Lineær algebra
Bokmål
Mandag 27. november 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensur: 18. desember 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Finn rang og nullitet til matrisa A . Finn basiser for de tre vektorrommene, nullrommet til A , radrommet til A og kolonnerommet til A .
- b) La A være ei vilkårlig inverterbar $n \times n$ -matrise og la B være ei vilkårlig $n \times m$ -matrise. Vis at da er

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}(B).$$

Oppgave 2

- a) La A være matrisa $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$. Diagonaliser matrisa A .

- b) Ved presidentvalget i USA i 1960 ble det avlagt 6 800 000 stemmer i staten Adidolf. Den republikanske kandidaten fikk 71 % av stemmene, mens den demokratiske kandidaten fikk 29 % av stemmene.

Det viser seg at det ved hvert presidentvalg blir avlagt 6 800 000 stemmer i Adidolf. For enkelhets skyld antar vi at det er de samme som stemmer ved alle valg. Imidlertid så stemmer 30 % av de som stemte republikansk ved et valg, demokratisk ved neste valg. Det samme skjer hos demokratene, 30 % av de som stemte demokratisk ved forrige valg, stemmer republikansk ved neste valg.

Hvilken kandidat vinner valget i 2000 i denne staten, og med hvor mange stemmer? (Det er valg hvert 4. år i USA).

Hvordan vil fordelingen mellom de to partiene bli i det lange løp i denne staten?

Oppgave 3

La M_{22} være vektorrommet

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, \in \mathbb{R} \right\}$$

- a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for M_{22} .

- b) La $T : M_{22} \longrightarrow M_{22}$ være avbildningen definert ved at

$$T(A) = A - A^T$$

der A^T er den transponerte av A .

Vis at T er en lineæroperator på M_{22} og finn matrisa til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

- c) Vis at billedmengden, $R(T)$, til T er

$$R(T) = \{B \in M_{22} \mid B^T = B\}$$

- d) Finn kjernen, $\text{Ker}(T)$, til lineær operatoren T .

Oppgave 4

La A være den komplekse matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn ei inverterbar matrise P som diagonaliserer A .

b) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 2y + iz \\ z' &= -iy + 2z \end{aligned}$$

med initial betingelser

$$x(0) = 4, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 6.$$

Oppgave 5

La P_2 være vektorrommet som består av alle polynom med grad høyst lik 2.

a) Vis at

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in P_2$$

definerer et indreprodukt på P_2 .

b) La $V = \{p \in P_2 | p(x) = a + bx + ax^2\}$.

Vis at V er et underrom av P_2 .

c) Finn en ortonormal basis for V med hensyn på indreproduktet i a).

d) Finn den beste tilnærmingen til polynomet $f(x) = 1 + x$ med et polynom i V .

Faglig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård
73 59 18 92

Eksamen i MNFMA 108, Lineær algebra

Bokmål
Tirsdag 30. mai 2000
Kl. 9-15

Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensurdato: 20. juni 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Hva er rangen og nulliteten til matrisa A ?
Finn basiser for radrommet, kolonnerommet og nullrommet til matrisa A .

Oppgave 2

La P_2 være vektorrommet av polynom av grad mindre eller lik 2. Vektorrommet blir et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

a) Bruk Gram-Schmidt-metoden til å ortonormalisere basisen $B = \{1, x, x^2\}$ for P_2 .

b) La $T: P_2 \rightarrow P_2$ være en avbildning definert ved at

$$T(f) = xf'(x) + f''(x) \text{ for en funksjon } f \in P_2.$$

Vis at T er en lineær operator, og finn matrisa til T , $[T]_B$, med hensyn på basisen $B = \{1, x, x^2\}$. Finn bildet, $R(T)$, og kjernen, $\text{Ker}(T)$, til lineær operatoren T .

Oppgave 3

En rakett skytes rett opp på nyttårsaften. I det raketten går tom for brennstoff begynner vi å måle høyden til raketten hvert sekund. Målingene er som følger:

tid (t)	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s
høyde (s)	40 m	45 m	41 m	26 m	2 m

Høyden til raketten etter t sekunder vil være gitt ved formelen

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

der v_0 er farten og s_0 er høyden, begge i det raketten går tom for brennstoff, og g er gravitasjonskonstanten. Bruk målingene til å gi et estimat for s_0 , v_0 og g .

Oppgave 4

En spesiell koloni av flaggermus har en levetid på mindre enn 3 år. Vi vet følgende om hunflaggermusene i denne kolonien: Ingen hunner yngre enn 1 år får barn, hunner mellom 1 og 2 år føder i gjennomsnitt 2 hunflaggermus hver og hunner over 2 år føder i gjennomsnitt 1 hunner. Vi vet også at sannsynligheten for at en hunflaggermus som er over 1 år blir 2 år, er 0.5. Sannsynligheten for at en nyfødt hunflaggermus overlever det første året kjenner vi ikke. Kall denne sannsynligheten for q . Når vi startet våre observasjoner av denne kolonien er det 300 hunner under 1 år, 180 hunner mellom 1 og 2 år, og 130 av hunnene er over 2 år.

- Skriv ned Leslie matrisa A for denne kolonien av flaggermus og beregn hvor mange hunflaggermus det er i hver aldersklasse etter 3 år uttrykt ved q .
- Etter å ha observert denne bestanden i mange år legger vi merke til at antall hunflaggermus nå holder seg konstant fra år til år. Beregn hva q må være.
- Når denne likevekten har inntruffet er det 640 hunflaggermus i kolonien. Hvordan vil disse fordele seg på de tre aldersklassene?

Oppgave 5

a) La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn en inverterbar matrise P som diagonaliserer A . Angi også diagonalmatrisa $D = P^{-1}AP$.

b) Løs følgende system av differensialligninger

$$x_1' = -4x_1 - 6x_2$$

$$x_2' = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

med initial betingelser

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1.$$

Oppgave 6

La A være ei kompleks matrise. Matrisa A er hermittisk hvis $A^* = A$, og den er skjev-hermittisk hvis $A^* = -A$. ($A^* = \overline{A^T}$ er den konjugert-transponerte av A).

- a) Anta at A er hermittisk, og la λ være en egenverdi for A . Vis at da er λ et reelt tall.
- b) La A være ei kompleks $n \times n$ -matrise. Vis at det finnes komplekse $n \times n$ -matriser B og C slik at B er hermittisk, C er skjev-hermittisk og $A = B + C$.

MNFMA 108, Lineær algebra
Bokmål
Tirsdag 1. juni 1999
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensur: Tirsdag 22. juni 1999

Oppgave 1

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s & 4 \\ 2 & 3s & 8+s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}$$

Finn rank A for alle s .

b) For hvilke verdier av s og t har likningssystemet

$$\begin{aligned} x + sy + 4z &= 0 \\ 2x + 3sy + (8+s)z &= t - 1 \\ sy + z &= -1 \end{aligned}$$

0, 1 eller ∞ mange løsninger?

Oppgave 2

a) Finn dimensjonen og en basis for løsningsrommet til systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$



b) La $a \in \mathbb{R}$. Hva er

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Oppgave 3

Bollerud Bakeri produserer loff og kneip. En har faste kontrakter på levering av 500 loff og 1000 kneip hver dag. Kapasiteten til brødbilen gjør at det kan leveres høyst 3000 brød hver dag. Bakeriet har bare en ovn som tar 300 loff pr. time eller 400 kneip pr. time. Arbeidsdagen er på 8 timer.

- Sett opp ulikhetene disse forutsetningene gir og illustrer med en figur.
- Fortjenesten er kr. 1,20 pr. loff og kr. 1,00 pr. kneip. Hvor mange loff og kneip må en bake hver dag for å få mest fortjeneste pr. dag?

Oppgave 4

La

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

med $p, q \in [0, 1]$.

- Vis at egenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p - q$ og finn en matrise P som diagonaliserer M .
- Vis at hvis $|p - q| < 1$ vil

$$M^n \rightarrow \frac{1}{1+q-p} \begin{bmatrix} q & q \\ 1-p & 1-p \end{bmatrix} \text{ når } n \rightarrow \infty.$$

Oppgave 5

- a) Finn en 2-grads kurve

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

som går gjennom punktene

$$(0, 0) \ (1, 0) \ (1, -2) \ (4, -2) \ (4, -6).$$

- b) Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linje $y = ax + b$ som passer best til de 5 punktene i a).

Oppgave 6

$$\text{La } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

Vis at A er unitær og finn en unitær matrise U slik at U^*AU er en diagonal-matrise.

Oppgave 7

La V være vektorrommet av alle $n \times n$ -matriser og la

$$W = \{A \in V \mid \text{tr} A = 0 \text{ og } A^T = A\}.$$

($\text{tr} A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$ og A^T er den transponerte matrisen.)

- a) Vis at W er et underrom av V .
- b) Finn en basis for W når $n = 2$ og når $n = 3$.
- c) Finn $\dim W$ for vilkårlig n .

Eksamen i Lineær algebra, MNFMA 108
Tirsdag 2. juni 1998
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Utdelt lommekalkulator
Sensurdato: 23. juni 1998

Oppgave 1

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at A har følgende reduserte trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen til A ?

Finn en basis for radrommet til A og søylerrommet til A .

b) Bestem også en basis for nullrommet til A .

c) For hvilke α, β er ligningssystemet $A\mathbf{x} = [1, 0, \alpha, \beta]^T$ løsbart? Angi løsningsmengden.

d) Finn en ortonormal basis for søylerrommet til A og bestem den minste verdien av

$$\|A\mathbf{x} - [1, 0, 0, 0]^T\|$$

når $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

Side 1 av 3



MNFMA 108, 2. juni 1998

Side 2 av 3

Oppgave 2

a) Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,15 \\ -0,20 & 1,10 \end{pmatrix}.$$

Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) På en øde øy blir det satt ut $R_0 = 100$ rever og $H_0 = 100$ harer. Etter n måneder er det R_n rever og H_n harer. Vi antar følgende matematiske modell for variasjonen av R_n og H_n :

$$R_{n+1} = 0,70R_n + 0,15H_n,$$

$$H_{n+1} = -0,20R_n + 1,10H_n.$$

Hvordan går det da med revbestanden og harebestanden når $n \rightarrow \infty$?

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til M . (Det oppgis at 2 er en egenverdi av multiplisitet 2.)

b) Gitt differensialligningssystemet

$$(\heartsuit) \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, og A er en $n \times n$ -matrise med n lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$$

svarende til egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ikke nødvendigvis forskjellige). Utled formelen

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{p}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{p}_n$$

for den generelle løsning av $(\heartsuit)$.

c) Finn den generelle løsning av differensialligningssystemet

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x}.$$

Oppgave 4

Finn a , b og c slik at kurven definert ved

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

er en ellipse med den største aksen langs vektoren $[3, 4]$ og av lengde 2, mens den minste aksen har lengden 1. (Hint: Innfør et passende $x'y'$ -koordinatsystem.)

Oppgave 5

La $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet av polynomer av grad høyst 3, og la $T: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ være avbildningen gitt ved $T(p) = p'$.

- a) Begrunn at $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ er en basis for $\mathcal{P}_3$ og at T er en lineæravbildning.
- b) Finn matrisen A til lineæravbildningen T med hensyn på basisen B (ordnet i rekkefølgen angitt i a)). Hva blir A^4 ?

Oppgave 6

Vi minner om at to $n \times n$ -matriser A og B kalles *similære* dersom det fins en invertibel matrise P slik at $B = P^{-1}AP$. Vis følgende:

- a) Similære matriser har samme rang og samme nullitet.
- b) Similære matriser har samme karakteristiske polynom (og samme egenverdier).

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
73 59 17 50

Eksamen i MA 108, *Linear algebra*
Onsdag 26. november 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensurdato: 17. desember 1997

Oppgave 1

- a) For hvilke verdier av r er matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & r \\ 2r & 8 \end{bmatrix}$$

inverterbar? Finn den inverse matrisen for disse verdiene av r .

- b) Drøft hvordan antall løsninger for likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x + ry &= r - 2 \\ 2rx + 8y &= r \end{aligned}$$

avhenger av r .

- c) Bestem rangen til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + kx_k + \dots + 100x_{100} &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + \dots + 2^k x_k + \dots + 2^{100} x_{100} &= 0 \end{aligned}$$

Finn dimensjonen til løsningsrommet.

Oppgave 2 Betrakt $\mathbb{R}^4$ med Euklidsk indreprodukt. La $W \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

- a) Finn en basis for W .

- b) Betrakt vektoren

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finn en ortonormert basis for W som har v_1 som første basisvektor.

- c) Finn den minste verdien som uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$\text{kan få når } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ varierer i } W$$

Oppgave 3 Det er gitt en kurve C i xy -planet ved likningen

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$$

- a) Finn et ortonormert koordinatsystem som forenkler likningen mest mulig.
b) Lag en skisse av kurven C , og angi også x -aksen og y -aksen og aksene i det nye systemet.

Oppgave 4 I vektorrommet av alle funksjoner som er definert på $\mathbb{R}$ lar vi V være underrommet med basis

$$B = \{1, x, x^2, e^x\}$$

La $T: V \rightarrow V$ være lineærabildningen gitt ved

$$T(f(x)) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

(f' og f'' står for henholdsvis derivert og dobbeltderivert).

- a) Finn matrisen til T med hensyn på basisen B .
- b) Bestem rangen til T (rank of T) og finn en basis for kjernen $\ker(T)$.

Oppgave 5

- a) Vis at røttene i likningen

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha ,$$

der α er et vilkårlig reelt tall, ligger på enhets sirkelen ($|z| = 1$) i det komplekse plan.

- b) Vis omvendt at om z er et komplekst tall på enhets sirkelen, så er $z + \frac{1}{z}$ reell og $-2 \leq z + \frac{1}{z} \leq 2$.



Bokmål

Eksamen I MA108 – Lineær Algebra

Antall timer: 6
Antall vektal: 3. Antall vedlegg: 0
Antall sider bokmål: 3. Antall sider nynorsk: 0.
Ingen tillatte hjelpemidler.
Sensurdato: 23. juni 1997

2. juni 1997

La $\mathcal{R}$ og $\mathcal{C}$ stå for hhv. de reelle tall og de komplekse tall. Begrunn alle din svar.

Opgave 1 Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP = D$.

b) Løs systemet af differensiallikninger

$$\begin{aligned} x_1 & - 2x_3 = x_1' \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 & = x_2' \\ -2x_1 & + x_3 = x_3' \end{aligned}$$

med initial betingelsene

$$x_1(0) = 2 \quad x_2(0) = 3 \quad x_3(0) = 0.$$

Opgave 2 Ole reiser til Danmark på ferie og kjøper boller hos en kjøpmann som ikke har prislister. Den første dagen kjøper han 3 rosinboller, 2 fløteboller og 1 tebolle, og må betale tilsammen 11 kr. Neste dag kjøper han 4 rosinboller, 1 fløtebolle og 2 teboller, og betaler tilsammen 15 kr. Den tredje dagen kjøper han kun et stykke av hver bolle og betaler tilsammen 6 kr. Hva koster de tre typene boller pr. stk?

Opgave 3 a) La $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Finn en inverterbar 2×2 matrise P , dens invers P^{-1} og en 2×2 diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) En land med 1.200.000 stemmeberettigede innbyggere har 2 partier X og Y, der i dag 800.000 stemmer på X og 400.000 på Y. Hvert år skifter 70% parti fra X til Y og 50% fra Y til X.

Hvordan blir fordelingen mellom partiene etter 3 år? Hvordan blir fordelingen i det lange løp?

Opgave 4 Identifisere de kjeglesnitt man får fra

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1 - a^2$$

for forskjellige verdier av a .

Skisser kurvene man får for $a = 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Opgave 5 La V være et vektorrom over $\mathcal{R}$ med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, og la v_0 være en fast vektor av lengde 1 i V . La $T : V \rightarrow V$ være definert ved $T(v) = \langle v, v_0 \rangle v_0$.

a) Vis at T er en lineær transformasjon.

b) Vis at $T^2 = T$.

c) Finn rangen av T .

d) Finn $\dim(\ker T)$.

e) Finn determinanten, $\det T$.

f) La v_1 være en vektor ikke proporsjonal med v_0 . Vis at $v_1 - T(v_1)$ er ortogonal til v_0 .

(Opgave 6 på neste side.)

Opgave 6 La A være en kompleks $n \times n$ matrise slik at $A^* = A$. La $\lambda \in \mathbb{C}$.

- a) Vis at λ er et reelt tall hvis og kun hvis $\bar{\lambda} = \lambda$.
- b) Vis at $\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle$ når $v \in \mathbb{C}^n$.
- c) Vis vha. a) og b) at egenverdiene av A er reelle tall.

La V være vektorrommet av alle *komplekse* funksjoner på formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$, der a og b er vilkårlige komplekse tall og $x \in \mathbb{R}$. La $T : V \rightarrow V$ være lineær transformasjonen gitt ved $T(f) = if'$, der $f'(x) = a \cos x - b \sin x$ er derivaten av f .

- d) Finn matrisen av T mhp. basisen $\{\sin x, i \cos x\}$.
- e) Finn egenverdiene og egenvektorene av T .



Eksamen I MA108: Lineær Algebra

Antall timer: 6

Antall vektral: 5. Ingen tillate hjelpemidler.

Antall sider bokmål: 3

Antal sider nynorsk: 0

Antall vedlegg: 0

Sensurdato: 17. desember 1996

26. november 1996

N.B. La $\mathcal{R}$ stå for de reelle tal.

Opgave 1 La $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Finn en basis til kjernen av $T_A : \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^2$, gitt ved $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^4$.
2. Finn en basis til bildet av T_A .
3. Finn alle løsninger av likningssettet,

$$\begin{aligned} -3x_1 + \quad \quad \quad - 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Opgave 2 La $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, og $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vis at determinanten av 4×4 matrisen $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$, uttrykt i blokmatrixe form, tilfredstiller

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Opgave 3 La $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $v_n = (1, 1, \dots, 1)$ i $\mathcal{R}^n$.

1. Vis at $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en basis for $\mathcal{R}^n$.
2. Ortonormaliser basisen $\{v_1, \dots, v_n\}$ for $\mathcal{R}^n$ ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 4 La $v_1, \dots, v_n$ være vektorer i en vektorrom V . Definere en avbildning $T : \mathcal{R}^n \rightarrow V$ ved

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

1. Vis at T er en lineær transformasjon.
2. Vis at T er inverterbar hvis og kun hvis $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en basis for V .

Opgave 5 La P_2 være vektorrommet av alle polynomfunksjoner av grad høyst 2, med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

for f og g i P_2 .

1. Vis at avbildningen $T : P_2 \rightarrow P_2$, gitt ved $T(f) = f + f' + f''$ når f er i P_2 , er en lineær transformasjon.
2. Finn matrisen til $T : P_2 \rightarrow P_2$ med hensyn på basisen $\{1, x, x^2\}$.
3. Avgjør om T er inverterbar. Begrunn dit svar.
4. Ortonormaliser basisen $\{1, x, x^2\}$ for P_2 ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 6 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. La $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$, for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^3$, være den assosierte kvadratiske form.

1. Bestem formen for $q(x_1, x_2, x_3)$.
2. Diagonaliser A .

3. Finn den største og den minste verdien til $q(\mathbf{x})$ på enhetssfæren $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
4. Vis at egenvektorene av A er ortogonale til hverandre.
5. Bestem den lineær transformasjon T_P av $\mathcal{R}^3$ i sigselv, $\mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x} = \mathbf{y}$ som diagonaliserer $q(\mathbf{x})$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast) vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

EKSAMEN I MA108 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 3. juni 1996

Antall timer: 6

Antall vekttall: 5 Tillatte hjelpemidler:
 Antall sider bokmål: 3 Utdelt kalkulator
 Antall sider nynorsk: 3
 Antall vedlegg: 0

Sensurdato: 24. juni 1996

Oppgave 1

- a) Bevis at en 3×3 -matrise er ortogonal hvis og bare hvis radvektorene til matrisen danner en ortonormal mengde.

La matrisen P være gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- b) Vis at P er ortogonal.
 c) Finn P^{-1} .
 d) Finn en 3×3 -matrise A som har egenverdiene 6, 12 og 18 og egenvektorene $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$ og $(0, 1, -1)$.

Oppgave 2

La U være mengden av alle $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ som er slik at $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

- a) Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}^4$.
 b) Vis at $B = \{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ er en basis for U .
 c) Finn en basis B' for U som er ortogonal med hensyn på det euklidske indreproduktet for $\mathbb{R}^4$.
 d) Finn det punktet i U som har kortest avstand til punktet $(1, 0, 0, 0)$.
 e) Finn overføringsmatrisen fra basis B til basis B' .
 f) Finn koordinatene til $(1, 2, 3, -6)$ både i basis B og i basis B' .

Oppgave 3

En kantine har 310 faste middagsgjester. På kantinen blir det servert en kjøttrett, en fiskerett og en pastaret. Av de som en dag spiser kjøttretten, velger 20 % kjøttretten neste dag, 40 % velger fiskeretten og 40 % velger pastaretten. Av de som en dag spiser fiskeretten, velger 50 % kjøttretten og 50 % pastaretten neste dag. Av de som en dag spiser pastaretten, velger 40 % kjøttretten, 30 % fiskeretten og 30 % pastaretten neste dag.

Hvor mange gjester spiser kjøttretten, fiskeretten og pastaretten etter en tid?

Oppgave 4

Bruk minste kvadraters metode til å finne likningen for den rette linja som passer best til datasettet

x	0	1	2	3	4
y	-1	2	3	5	6

Oppgave 5

La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Undersøk om A er hermittisk, unitær eller normal.
- b) Er matrisen A unitært diagonaliserbar? Begrunn svaret.
- c) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.
- d) Finn om mulig en unitær matrise P som diagonaliserer A.
- e) Bevis at alle egenverdiene til en hermittisk matrise er reelle.

Merk: Ved hjelp av tastafon vil du kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisningene som blir gitt.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA108 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 28. november 1995

Antall timer: 6

Antall vektall:	5	Tillatte hjelpemidler:
Antall sider bokmål:	3	Utdelt kalkulator
Antall sider nynorsk:	0	
Antall vedlegg:	0	

Sensurdato: 19. desember 1995

Oppgave 1

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

er gitt.

- a) Finn den inverse matrisen til A.
- b) For hvilke s ligger løsningen av likningssystemet

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ -3x + 6y + 6z &= 3s \\ 3x - 5y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

i planet $x + y + z = 21$?

- c) Finn en ortonormal basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 2

La V være indreproduktrommet av funksjoner av typen

$$f(x) = a + bx + c \sin x$$

der $a, b \in \mathbb{R}$. Indreproduktet i V er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

- a) Vis at $\{1, x, \sin x\}$ er en basis for V.
- b) Finn en ortonormal basis for underrommet utspent av de to funksjonene $f(x) = 1$ og $g(x) = x$.

Oppgave 3

Matrisen M er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Finn egenverdiene og de to egenrommene E_1 og E_2 til M.
- b) Finn matrisen P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen.
- c) Vis at en vilkårlig $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ kan skrives entydig som den sum $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ der $\underline{v}_1 \in E_1$ og $\underline{v}_2 \in E_2$.

Oppgave 4

- a) Overfør kjeglesnittet

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

til standard form, finn ut hvilket kjeglesnitt det er.

- b) Tegn kjeglesnittet i koordinatsystemet som har x og y som koordinater.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.

Plasser løsningene i det komplekse planet.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA08 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 1. juni 1995

Antall timer: 6

Antall vekttall:	5	Tillatte hjelpemidler:
Antall sider bokmål:	3	Utdelt kalkulator
Antall sider nynorsk:	3	
Antall vedlegg:	0	

Sensurdato: 22. juni 1995

Oppgave 1

La $t \in \mathbb{R}$ og la

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Finnt ut om matrisen A er inverterbar.
- Finnt rangen til matrisen A .
- Finnt en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Finnt kolonnevektorer i A som danner basis for kolonnerommet til A .

Oppgave 2

La $W \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til likningssettet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

- Finnt en basis for W .
- Finnt en ortonormal basis for W der en av basisvektorene er parallell med vektoren $\underline{v} = (1, -1, 1, -1)$. (Basisen skal være ortonormal med hensyn på det euklidske indreproduktet for $\mathbb{R}^4$.)
- Finnt den minste verdien av uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

når $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$.

Oppgave 3

- Finnt egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finnt en matrise P som diagonaliserer A ortogonalt.
- Overfør den kvadratiske likningen

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y + 8 = 0$$

- til standard form ved hjelp av koordinatskifte.
- Tegn kjeglesnittet i oppgave c).
- La $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ være den assosierte kvadratiske formen til likningen for et kjeglesnitt. Hvordan kan vi bare ved hjelp av egenverdiene til A se hvilket kjeglesnitt det er?

Oppgave 4

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom der $\dim V > 0$.

La $T : V \rightarrow V$ være en lineær transformasjon som er slik at

$$\ker(T) = R(T)$$

a) Vis at T ikke er enentydig.

b) Vis at dimensjonen til V er et partall.

c) La dimensjonen til V være et positivt partall.

Vis at det finnes en lineær transformasjon $T : V \rightarrow V$ som er slik at $\ker(T) = R(T)$.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$iz^3 = 8$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.

Plasser løsningene i det komplekse planet.