Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Carl Fredrik Berg (975 05 585)

EKSAMEN I MA1202 OG MA6202
LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Bokmål
Onsdag 30. mai 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator (HP30S)

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn rank(A) (rangen til A), og gi en basis for kolonnerommet til A.

b) Finn null(A) (nulliteten til A). Er vektoren $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i nullrommet til A?

Oppgave 2 Se på mengden $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ hvor operasjonene *addisjon* og *skalarmultiplikasjon* er gitt ved standard matriseaddisjon og multiplikasjon med reelle tall:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

a) Vis at V med de gitte operasjonene er et reellt vektorrom. (Det anses som kjent at mengden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ av reelle 2×2-matriser med standard operasjoner er et reellt vektorrom.)

b) Finn en basis for V og finn dimensjonen $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ til det reelle vektorrommet V.

Oppgave 3 La lineærtransformasjonen $T\colon P_2 \to P_1$ være gitt ved

$$T(p(x)) = p'(x+1) \left(= \frac{dp(x+1)}{dx} \right)$$

Her er $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ det reelle vektorrommet bestående av alle polynom av grad mindre eller lik 2, og $P_1 = \{a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ det reelle vektorrommet bestående av alle polynom av grad mindre eller lik 1, hvor både P_2 og P_1 har standard addisjon og skalarmultiplikasjon.

La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ og $\mathcal{B}' = \{1+x, 1-x\}$ være basiser for henholdvis P_2 og P_1.

a) Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ til T ($[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ i henhold til lærebokas notasjon), og finn $T(2x^2-4)$ ved å bruke $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

b) Avgjør om T er 1-1 (injektiv), og finn bildet (rekkevidden) $R(T)$ til T.

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og basis for de tilhørende egenrommene til matrisen A.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer A og den tilhørende diagonalmatrisen D slik at $P^{-1}AP = D$. Regn ut A^{97} og A^{136}.

c) Anta at vi har følgende system av reelle funksjoner:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2f(x) & - & 5g(x) & + & 3h(x) & = & f'(x) \\ & - & g(x) & & & = & g'(x) \\ -f(x) & - & 5g(x) & + & 2h(x) & = & h'(x) \end{array}$$

Bruk diagonaliseringen over til å bestemme funksjonene $f(x), g(x)$ og $h(x)$ når $f(0) = 1, g(0) = -1$ og $h(0) = 2$.

Oppgave 5

La $\langle -, - \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ være et generelt kompleks indreprodukt. Hvorfor er $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ for alle $u \in V$?

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Truls Fretland (73 55 89 87)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Bokmål
Tirsdag 23. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 13. juni 2006

Hjelpemidler:
Rottman formelsamling. Enkel kalkulator (HP30S)

Oppgave 1 Gitt vektoren $\mathbf{b}$ og de to radekvivalente matrisene A og B:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn rang(A) og dimensjonen til nullrommet til A. Hva er $\dim(R(A))$, når $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\}$?

b) Finn en basis for kolonnerommet til A, $R(A)$, og en basis for nullrommet til A^T, Null(A^T).

Gitt indreproduktrommet $\mathbf{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

c) Bruk minste kvadraters metode til å finne ligningen for den rette linja, $y = ax + b$, som passer best til datasettet gitt i Tabell 1. Finn projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A.

d) Vis at $\mathbf{b} - A\mathbf{x}' \in$ Null(A^T), der $\mathbf{x}'$ er minste kvadraters løsning funnet i oppgave c).

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Tabell 1: Datasett

e) Finn en ortogonal basis for $R(A)$, kall denne B. Finn en ortogonal basis for $\text{Null}(A^T)$, kall denne B'. Forklar (kort) hvorfor $B \cup B'$ danner en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$.

Oppgave 2 Matrisen M gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

har to distinkte egenverdier.

a) Finn egenverdiene og en basis for de to egenrommene E_1 og E_2 til M.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen D, slik at $P^{-1}MP = D$.

c) En kantine serverer kjøtt-, fiske- og vegetar-måltider til 100 faste middagsgjester. Kokken er en noe spesiell hobbymatematiker og ønsker å forutsi hvordan middagsgjestene fordeler seg på de ulike rettene. Kokken har observert følgende: De som spiser vegetar spiser vegetar neste dag. Av de som spiser kjøtt spiser 80% kjøtt neste dag og 20% fisk neste dag. Av de som spiser fisk spiser 80% fisk neste dag og 20% kjøtt neste dag. Hvis det en gitt dag er 10 personer som spiser vegetar, 80 som spiser kjøtt og 10 som spiser fisk, hvordan fordeler disse seg da etter 5 dager?

Oppgave 3 La P_2 være vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 2. La $V = \{p(x) \mid p(x) = a - ax + bx^2 \in P_2, a, b \in \mathbf{R}\}$ være et vektorrom.

a) Vis at V er et underrom av P_2.

La $T : V \to W$ være en transformasjon definert ved

$$T(p) = (1 + x)p(x),$$

der W er et underrom av P_3.

b) Vis at T er en lineær transformasjon. Finn billedmengden til T, $R(T)$.

Betrakt nå indreproduktrommene V og W, med indreprodukt definert ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx. \tag{1}$$

c) Gitt basisen $B = \{(1-x), x^2\}$ for V og basisen $B' = \{1-x^2, -1+5x^2+4x^3\}$ for W. Vis at mengden B' er ortogonal med hensyn på indreproduktet gitt av (1). Finn matrisen til T, $[T]_{B',B}$, og bruk denne til å regne ut $T(-1+x-4x^2)$.

Oppgave 4 La A være en kompleks skjev-hermitsk matrise. Matrisa kalles skjev-hermitsk hvis $A^* = -A$, der A^* er den konjugert-transponerte ($A^* = \bar{A}^T$).

a) Vis at iA er Hermitsk, der $i = \sqrt{-1}$.

b) Vis at A er unitært diagonaliserbar.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni, tlf. 93541, mobil 48238584

EKSAMEN I FAG MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER
Lordag 17. desember 2005
Tid: 15:00–19:00

Hjelpemidler: C – Rottmann formelsamling.
Enkel kalkulator (HP 30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller i uke 3.

Oppgave 1
La t være et reelt tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -t & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem rang og nullitet for A_t for hver t.

b) For hvilke t har ligningssystemet

$$A_t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. nøyaktig en løsning
2. ingen løsning
3. uendelig mange løsninger.

Oppgave 2
Betrakt mengden

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad \text{s.a.} \quad a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) Vis at $\mathcal{M}$ er et underrom av vektorrommet $M_{3,3}$ av 3×3 reelle matriser. Vis at

$$\mathcal{B} := \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathcal{M}$. Betrakt indreproduktet

$$\langle A, B \rangle \ := \ \mathrm{trace}(A^T B), \quad A, B \in \mathcal{M}.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathcal{M}$ med hensyn på dette indreproduktet.

b) Betrakt $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ slik at

$$T(A) = E_1 A - A E_1.$$

Vis at T er en lineær transformasjon på $\mathcal{M}$. Finn matrisa til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Avgjør om T er en-entydig. Finn billedmengde $R(T)$ og kjernen (nullrommet) $\mathrm{Ker}(T)$ til T.

Oppgave 3
Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er gitt. Vis at A er normal. Diagonaliser A ved hjelp av en unitær similartransformasjon.

Oppgave 4
Betrakt $n \times n$-matrisen S der $\det(S) \neq 0$. Betrakt den lineære transformasjonen $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$ slik at

$$T(A) = S^{-1} A S.$$

Vis at λ er en egenverdi til A hvis og bare hvis λ er en egenverdi til $T(A)$.

Oppgave 5
I desember 2005, på en lekebutikk i Trondheim brukes det papir av to forskjellige farger for innpakning av julegaver, rødt eller blått.

Det viser seg at hvis siste gave er blitt pakket i rødt papir er det 60% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 40% sannsynlighet at rødt papir blir brukt. Hvis siste gave er blitt pakket i blått papir er det 45% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 55% sannsynlighet at rødt papir blir brukt.

Med hvilken sannsynlighet blir rødt og blått papir brukt i det lange løp?

**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni, tlf. 93541, mobil 48238584

EKSAMEN I FAG MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Fredag 3. juni 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: C – Rottmann formelsamling.
Enkel kalkulator (HP 30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller i uke 24.

Oppgave 1

La t være et reell tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Drøft hvordan $\operatorname{rank}(A_t)$ variere med t.

b) For hvilket t har ligning systemet

$$A_t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-t \\ -t \\ 2t-1 \end{bmatrix}$$

1. nøyaktig en løsning
2. ingen løsning
3. uendelig mange løsninger.

Oppgave 2
Betrakt de lineære transformasjonene

$$T_1 : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3, \qquad T_1(p) = xp(x),$$

og

$$T_2 : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2, \qquad T_2(p) = \frac{dp(x)}{dx},$$

der $\mathbf{P}_2$ er polynomene i en variable x av grad mindre eller lik 2 og $\mathbf{P}_3$ er polynomene i en variable x av grad mindre eller lik 3.

a) Finn inverse av $T_2 \circ T_1$,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} : \mathcal{R}(T_2 \circ T_1) \to \mathbf{P}_2,$$

der $\mathcal{R}(T_2 \circ T_1)$ er rekkevidde til $T_2 \circ T_1$.

b) Betrakt $B := \{1, x-1, (x-1)^2\}$ basis av $\mathbf{P}_2$ finn matrisen $[T_2 \circ T_1]_B$.

c) Finn rang og nullitet til $T_2 : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2$.

Oppgave 3
Matrise

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

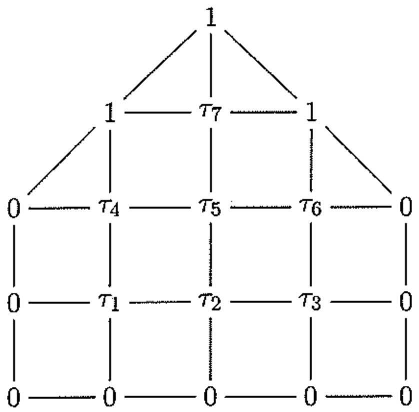
er gitt.

a) Diagonaliser A.

b) Finn løsning $y(t)$ til det lineære differensjalligningsystemet

$$y' = Ay, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4
Finn en tilnærmelse til likevektstemperaturfordeling i den tynne platen fordelt med følgende gitter:



der τ_i er den ukjente temperaturen i punkt i, og temperaturen er gitt i randpunktene.

a) Sett opp det lineære ligningsystemet, $A\mathbf{t} = \mathbf{b}$ som gir løsning $\mathbf{t} = [\tau_1, \ldots, \tau_7]^T$ ved bruk av diskretmiddelverdiegenskapet. Utfør to iterasjoner av Jacobi metode for å løse systemet. Ta
$$\mathbf{t}^{(0)} = [0, \ldots, 0]^T,$$
som initial tilnæermelse.

Oppgave 5

La A være en $n \times n$ sjev-hermittsk matrise, dvs slik at $A^* = -A$.

a) Vis at egenverdiene til A er rene immaginare tall.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Mats Molberg
Telefon: (735)97774

Eksamen i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Fredag 14. mai 2004
Kl. 09.00-13.00
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Sensur: Fredag 4. juni 2004.

Hvert av de 9 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) La $t \in \mathbb{R}$ og

$$M_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestem rang og nullitet for M_t for alle t. Finn en basis for radrommet til M_t for hver t.

b) La P_2 være vektorrommet av alle reelle polynom med grad mindre eller lik 2 med basisen $B = \{1, x, x^2\}$, og la $T : P_2 \longrightarrow P_2$ være den lineære operatoren gitt ved

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_1) + (2a_0 + a_2)x + (a_0 + 3a_1 - a_2)x^2.$$

Finn $[T]_B$, $\ker(T)$ og avgjør om T er en-entydig.

Oppgave 2

La W være planet med likning $x + y + z = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Vis at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en ortonormal basis for W med hensyn på det Euklidske indreproduktet.

Oppgave 3

Hunndyrandelen av en dyrepopulasjon er beskrevet ved en Leslie modell med tre aldersgrupper. Den tilhørende Lesliematrisen er gitt ved

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{9}{17} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en egenverdi for L, og bestem hvorvidt populasjonen på sikt er voksende, avtagende eller stabil.

Oppgave 4

a) Begrunn hvorfor likningsettet

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}$$

ikke har noen løsning, og finn minste kvadraters løsning av systemet.

b) Finn den beste tilnærmingen - i henhold til minste kvadraters metode - av en rett linje $y = a + bx$ til punktene $(0, 1), (1, 1), (2, 3)$ og $(3, 2)$.

Oppgave 5

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & 3i & 4 \\ 3-i & 1 & -2 & 2+i \\ -3i & -2 & -1 & 1-i \\ 4 & 2-i & 1+i & 3 \end{bmatrix}.$$

Svar på følgende:

- Er A er hermitisk?
- Er A unitært diagonaliserbar?

b) La B være en vilkårlig hermitisk matrise. Vis at $\det(B)$ er et reelt tall.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Magnus B. Landstad
Telefon: 73 59 17 53

MNFMA 108, Lineær Algebra
Bokmål
Onsdag 21.mai 2003
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Ingen.
Sensur: Onsdag 11. juni 2003

Oppgave 1

a) Finn den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

b) La N være matrisen

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn rang og nullitet av N

c) Finn en basis for Null (N).

Oppgave 2

a) La $Q(x, y) = 7x^2 + 3y^2 - 2xy$.
Avgjør hva slags kurve $Q(x, y) = 1$ er. Begrunn svaret.

b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 3
Finn ligningen $y = ax + b$ som best approksimerer – i henhold til minste kvadraters metode – følgende datapunkter $(x_i, y_i) : (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$.

Oppgave 4 La t være et reelt tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Drøft hvordan rang (A_t) varierer med t.

b) For hvilke t har likningssystemet

$$A_t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

(i) nøyaktig en løsning,

(ii) ingen løsning,

(iii) uendelig mange løsninger.

Oppgave 5
La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene til A og en basis for $\mathbf{C}^2$ som diagonaliserer A.

Oppgave 6
La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ være en lineært uavhengig mengde i et vektorrom V. Vis at da er også

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3\}$$

lineært uavhengig.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian F. Skau
Telefon: 73 59 17 55

MNFMA 108, Lineær Algebra

Bokmål
Fredag 31.mai 2002
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.
Sensur: Fredag 21.juni 2002

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er oppgitt at B er rad-ekvivalent ("row equivalent") til A.

a) Finn rang (A) og dim (Null (A)). Hva er $\dim(R(A))$, der $R(A) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^5\}$?

b) Finn basiser for henholdsvis radrommet, kolonnerommet og nullrommet til A.

Oppgave 2

La $V \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

a) Finn en ortonormal basis for V.

b) Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$, der de to første basiselementene er de du fant i a).

c) Finn den beste approksimasjonen til $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i V.

Oppgave 3

Som et miljøtiltak har Trondheim kommune utplassert 350 sykler til gratis utleie på tre steder i byen: i sentrum (A), i øst (B) og i vest (C). Syklene kan lånes fra tidlig om morgenen mot en viss sum, som fås tilbake ved tilbakelevering innen samme kveld. Etter en prøveperiode har man erfart at syklene utlånt om morgenen fra (A) leveres tilbake om kvelden etter følgende mønster: 80% til (A), 10% til (B) og 10% til (C). Tilbakeleveringsprosentene fra (B) er: 30% til (A), 60% til (B) og 10% til (C), mens de fra (C) er: 30% til (A), 10% til (B) og 60% til (C). For enkelthets skyld antar vi at dette mønsteret gjentar seg dag etter dag, at alle sykler blir utlånt hver morgen og at ingen sykler blir stjålet .

a) En morgen viser det seg at de utplasserte syklene fordeler seg slik: 180 i (A), 85 i (B) og 85 i (C). Finn hvordan syklene var fordelt om morgenen dagen før.

b) I det lange løp vil den prosentvise fordelingen (morgen eller kveld) av syklene mellom (A), (B) og (C) nærme seg en bestemt "likevekts"-fordeling, uansett hvordan fordelingen var i utgangspunktet. Begrunn denne påstanden ved å uttrykke den i et matematisk språk og ved å nevne hvilket resultat fra teorien som den bygger på. Bestem deretter hvordan syklene vil tilnærmelsesvis fordele seg mellom (A), (B) og (C) i det lange løp.

Oppgave 4

a) La $Q(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$. Avgjør hva slags kurve $Q(x,y) = 1$ er. Begrunn svaret.

b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 5

a) La P være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vis at P er invertibel og finn P^{-1}.

b) For hvert reelt tall t, la A_t være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t^2+6 \end{bmatrix}$. Drøft hvordan rang (A_t) varierer med t, og angi for hver t en basis for kolonnerommet til A_t som består av kolonnevektorer til A_t.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Aslak Bakke Buan
Telefon: 5 02 89

MNFMA108, Lineær algebra

Bokmål
Tirsdag 27. november 2001
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensur: 18. desember 2001
Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1

La $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & a & 3 \end{pmatrix}$, der a er et reelt tall.

a) Bestem determinanten til M. For hvilke verdier av a er M inverterbar?

b) Finn nullrommet til M for alle forskjellige verdier av a?

c) Hva er rangen til M for alle forskjellige verdier av a?

d) La $a = 3$. Finn den inverse matrisa M^{-1}, og løs likningssettet

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) La $a = 1$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}MP$ er en diagonal matrise.

Oppgave 2

Gitt tre punkter i planet (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3), som ikke ligger på en rett linje. Da finnes en unik sirkel gjennom punktene, med likning

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0.$$

a) Finn en 4×4-matrise A slik at $\det A = 0$ gir oss likningen for sirkelen, der $\det A$ betegner determinanten til A.

b) Bruk a) til å finne sirkelen gjennom punktene $(2,6), (2,0)$ og $(5,3)$.

Oppgave 3

La V være vektorrommet av alle polynomer på formen $f(x) = a + bx^2$, der a, b er reelle tall.

a) Vis at dette er et underrom av $\mathbf{P}_2$, rommet av alle polynomer av grad høyst to (med reelle koeffisienter), og finn en basis for V.

La $T: V \to \mathbf{R}^2$ være funksjonen gitt ved

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

b) Vis at T er en en-entydig (injektiv) lineær-transformasjon.

c) Vis at

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

gir et indreprodukt på $\mathbf{P}_2$, mens

$$< f, g > = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

ikke gir et indreprodukt på $\mathbf{P}_2$. Vil

$$< f, g > = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

gi et indreprodukt på V?

d) Finn en ortonormal basis for rommet V med hensyn på indreproduktet

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Oppgave 4

a) Hva vil det si at en matrise er diagonaliserbar? Hva vil det si at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar?

La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ være en symmetrisk matrise der a, b og c er reelle tall. Anta at A bare har positive egenverdier.

b) Vis først at $\det A > 0$. Bruk så dette, samt at A har (minst) en positiv egenverdi til å vise at $a > 0$.

c) Bruk resultatene fra b) til å vise følgende: Det finnes en unik reell matrise

$$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

med $x, z > 0$ slik at $A = LL^T$, der L^T er den transponerte matrisen til L.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA108 LINEÆR ALGEBRA

Bokmål
Fredag 1. juni 2001
Kl. 09.00 - 15.00
Sensur: Fredag 22. juni 2001

Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.

Oppgave 1

La a og d være reelle tall og betrakt matrisa $M_{a,d}$ gitt ved

$$M_{a,d} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

$$La\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn $P^{-1} M_{a,d} P$?

b) Finn betingelsen på a og d slik at rangen til $M_{a,d}$ er 4.
Hvilke verdier vil rangen til $M_{a,d}$ og nulliteten til $M_{a,d}$ anta?

Oppgave 2

La r være et naturlig tall ($r \in \{1,2,3,\dots\}$)

Betrakt matrisa

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og la}$$

$T_r = -(E_r^{-1})^T E_r$.

a) Regn ut og verifiser at

$$T_r = \begin{pmatrix} -1 & r \\ -r & r^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgjør for hvilke r matrisen T_r kan diagonaliseres som reell matrise.

Oppgave 3

Betrakt indreproduktrommet $\mathbb{R}^3$, med vanlig prikkprodukt.

$$La\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess til å finne w_2 og w_3 slik at $\{v_1, w_2, w_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Finn matrisa $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2v_1 v_1^T\right]$ der $v_1 v_1^T$ er vanlig matrisemultiplikasjon der v_1 oppfattes som en 3×1-matrise. Vis at v_1, w_2 og w_3 fra del **a)** av oppgaven er egenvektorer til denne matrisen.

c) La u være en vektor i $\mathbb{R}^3$ med $\|u\| = 1$. Forklar hvorfor $I - 2uu^T$ er matrisa til lineærtransformasjonen en får ved å speile i planet normalt på u der I er 3 x 3 - identitetsmatrisen og u oppfattes som en 3×1-matrise.

Oppgave 4

Anta at vi har observert en barkebillebestand av hunnbiller i et område. Etter at bestanden er delt inn i tre aldersgrupper fremkommer følgende data, der bare hunnbiller teller med i alle tall.

Aldersgruppe 1 gjenføder ingen mens 90 % fra aldersgruppe 1 overlever til aldersgruppe 2. Fra aldersgruppe 2 får halvparten ett avkom og 11 av 15 overlever til tredje aldersgruppe. I tredje aldergruppe får 5 av 6 ett avkom mens alle i tredje aldersgruppe dør ut i løpet av denne perioden.

a) Skriv ned Leslie-matrisen til populasjonen over.

b) Finn egenverdiene til denne matrisen (en reell og to ikkereelle) og vis at de ikkereelle egenverdiene har absoluttverdi mindre enn 1.

c) Finn egenvektoren tilhørende den reelle egenverdien og forklar hva som skjer i det lange løp dersom trenden ved observasjonen fortsetter?

Oppgave 5

La V og W være vektorrom og $f : V \to W$ en lineæravbildning.

a) Vis at dersom $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for V så er bildet til f lik $\operatorname{lin\,span}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$, vektorunderrommet av W utspent av $f(v_1), \ldots, f(v_n)$.

b) Vis at dersom $\{w_1, \ldots, w_m\}$ er lineært uavhengig i bildet til f og $u_1, \ldots, u_m$ i V er valgt slik at $f(u_i) = w_i$ så er $\{u_1, \ldots, u_m\}$ lineært uavhengig i V.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Inger Heidi Slungård
Telefon: 735 91880

MNFMA108. Lineær algebra
Bokmål
Mandag 27. november 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensur: 18. desember 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Finn rang og nullitet til matrisa A. Finn basiser for de tre vektorrommene, nullrommet til A, radrommet til A og kolonnerommet til A.

b) La A være ei vilkårlig inverterbar $n \times n$-matrise og la B være ei vilkårlig $n \times m$-matrise. Vis at da er

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(B).$$

Oppgave 2

a) La A være matrisa $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$. Diagonaliser matrisa A.

b) Ved presidentvalget i USA i 1960 ble det avlagt 6 800 000 stemmer i staten Adirolf. Den republikanske kandidaten fikk 71 % av stemmene, mens den demokratiske kandidaten fikk 29 % av stemmene.

Det viser seg at det ved hvert presidentvalg blir avlagt 6 800 000 stemmer i Adidolf. For enkelhets skyld antar vi at det er de samme som stemmer ved alle valg. Imidlertid så stemmer 30 % av de som stemte republikansk ved et valg, demokratisk ved neste valg. Det samme skjer hos demokratene, 30 % av de som stemte demokratisk ved forrige valg, stemmer republikansk ved neste valg.

Hvilken kandidat vinner valget i 2000 i denne staten, og med hvor mange stemmer? (Det er valg hvert 4. år i USA).

Hvordan vil fordelingen mellom de to partiene bli i det lange løp i denne staten?

Oppgave 3

La M_{22} være vektorrommet

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d, \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for M_{22}.

b) La $T : M_{22} \longrightarrow M_{22}$ være avbildningen definert ved at

$$T(A) = A - A^T$$

der A^T er den transponerte av A.

Vis at T er en lineæroperator på M_{22} og finn matrisa til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Vis at billedmengden, $R(T)$, til T er

$$R(T) = \{B \in M_{22} \; B^T = B\}$$

d) Finn kjernen, $\operatorname{Ker}(T)$, til lineær operatoren T.

Oppgave 4

La A være den komplekse matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn ei inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

b) Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= \quad 2y + iz \\ z' &= \quad -iy + 2z \end{aligned}$$

med initial betingelser

$$x(0) = 4, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 6.$$

Oppgave 5

La P_2 være vektorrommet som består av alle polynom med grad høyst lik 2.

a) Vis at

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in P_2$$

definerer et indreprodukt på P_2.

b) La $V = \{p \in P_2 | p(x) = a + bx + ax^2\}$.
Vis at V er et underrom av P_2.

c) Finn en ortonormal basis for V med hensyn på indreproduktet i a).

d) Finn den beste tilnærmingen til polynomet $f(x) = 1 + x$ med et polynom i V.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård
73 59 18 92

Eksamen i MNFMA 108, *Lineær algebra*

Bokmål
Tirsdag 30. mai 2000
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensurdato: 20. juni 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hva er rangen og nulliteten til matrisa A?
Finn basiser for radrommet, kolonnerommet og nullrommet til matrisa A.

Oppgave 2

La P_2 være vektorrommet av polynom av grad mindre eller lik 2. Vektorrommet blir et indreproduktrom med indreproduktet

$$<f,g> = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

a) Bruk Gram-Schmidt-metoden til å ortonormalisere basisen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ for P_2.

b) La $T : P_2 \to P_2$ være en avbildning definert ved at

$$T(f) = xf'(x) + f''(x) \text{ for en funksjon } f \in P_2.$$

Vis at T er en lineær operator, og finn matrisa til T, $[T]_{\mathcal{B}}$, med hensyn på basisen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Finn bildet, $R(T)$, og kjernen, $Ker(T)$, til lineær operatoren T.

Oppgave 3

En rakett skytes rett opp på nyttårsaften. I det raketten går tom for brennstoff begynner vi å måle høyden til raketten hvert sekund. Målingene er som følger:

tid (t)	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s
høyde (s)	40 m	45 m	41 m	26 m	2 m

Høyden til raketten etter t sekunder vil være gitt ved formelen

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

der v_0 er farten og s_0 er høyden, begge i det raketten går tom for brennstoff, og g er gravitasjonskonstanten. Bruk målingene til å gi et estimat for s_0, v_0 og g.

Oppgave 4

En spesiell koloni av flaggermus har en levetid på mindre enn 3 år. Vi vet følgende om hunflaggermusene i denne kolonien : Ingen hunner yngre enn 1 år får barn, hunner mellom 1 og 2 år føder i gjennomsnitt 2 hunflaggermus hver og hunner over 2 år føder i gjennomsnitt 1 hun hver. Vi vet også at sannsynligheten for at en hunflaggermus som er over 1 år blir 2 år, er 0.5. Sannsynligheten for at en nyfødt hunflaggermus overlever det første året kjenner vi ikke. Kall denne sannsynligheten for q. Når vi staret våre observasjoner av denne kolonien er det 300 hunner under 1 år, 180 hunner mellom 1 og 2 år, og 130 av hunnene er over 2 år.

a) Skriv ned Leslie matrisa A for denne kolonien av flaggermus og beregn hvor mange hunflaggermus det er i hver aldersklasse etter 3 år uttrykt ved q.

b) Etter å ha observert denne bestanden i mange år legger vi merke til at antall hunflaggermus nå holder seg konstant fra år til år. Beregn hva q må være.

c) Når denne likevekten har inntruffet er det 640 hunflaggermus i kolonien. Hvordan vil disse fordele seg på de tre aldersklassene?

Oppgave 5

a) La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en inverterbar matrise P som diagonaliserer A. Angi også diagonalmatrisa $D = P^{-1}AP$.

b) Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 - 6x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_3' &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

med initial betingelser

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1.$$

Oppgave 6

La A være ei kompleks matrise. Matrisa A er hermittisk hvis $A^* = A$, og den er skjev-hermittisk hvis $A^* = -A$. ($A^* = \overline{A^T}$ er den konjugert-transponerte av A).

a) Anta at A er hermittisk, og la λ være en egenverdi for A. Vis at da er λ et reelt tall.

b) La A være ei kompleks $n \times n$-matrise. Vis at det finnes komplekse $n \times n$-matriser B og C slik at B er hermittisk, C er skjev-hermittisk og $A = B + C$.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Magnus Landstad
Telefon: 9 17 53

MNFMA 108, Lineær algebra

Bokmål
Tirsdag 1. juni 1999
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensur: Tirsdag 22. juni 1999

Oppgave 1

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s & 4 \\ 2 & 3s & 8+s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}$$

Finn rank A for alle s.

b) For hvilke verdier av s og t har likningssystemet

$$\begin{aligned} x + sy \quad + 4z &= 0 \\ 2x + 3sy + (8+s)z &= t-1 \\ sy \quad + z &= -1 \end{aligned}$$

0, 1 eller ∞ mange løsninger?

Oppgave 2

a) Finn dimensjonen og en basis for løsningsrommet til systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

b) La $a \in \mathbf{R}$. Hva er

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Oppgave 3

Bollerud Bakeri produserer loff og kneip. En har faste kontrakter på levering av 500 loff og 1000 kneip hver dag. Kapasiteten til brødbilen gjør at det kan leveres høyst 3000 brød hver dag. Bakeriet har bare en ovn som tar 300 loff pr. time eller 400 kneip pr. time. Arbeidsdagen er på 8 timer.

a) Sett opp ulikhetene disse forutsetningene gir og illustrer med en figur.

b) Fortjenesten er kr. 1,20 pr. loff og kr. 1,00 pr. kneip. Hvor mange loff og kneip må en bake hver dag for å få mest fortjeneste pr. dag?

Oppgave 4

La

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

med $p, q \in [0,1]$.

a) Vis at egenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p - q$ og finn en matrise P som diagonaliserer M.

b) Vis at hvis $|p-q| < 1$ vil

$$M^n \to \frac{1}{1+q-p} \begin{bmatrix} q & q \\ 1-p & 1-p \end{bmatrix} \text{ når } n \to \infty.$$

Oppgave 5

a) Finn en 2-grads kurve

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

som går gjennom punktene

$$(0,0)\ (1,0)\ (1,-2)\ (4,-2)\ (4,-6).$$

b) Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linje $y = ax + b$ som passer best til de 5 punktene i a).

Oppgave 6

La $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

Vis at A er unitær og finn en unitær matrise U slik at U^*AU er en diagonal-matrise.

Oppgave 7

La V være vektorrommet av alle $n \times n$-matriser og la

$$W = \{A \in V \mid trA = 0 \text{ og } A^T = A\}.$$

($trA = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$ og A^T er den transponerte matrisen.)

a) Vis at W er et underrom av V.

b) Finn en basis for W når $n = 2$ og når $n = 3$.

c) Finn $\dim W$ for vilkårlig n.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag
73 59 17 44

Eksamen i Lineær algebra, MNFMA 108
Tirsdag 2. juni 1998
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Utdelt lommekalkulator
Sensurdato: 23. juni 1998

Oppgave 1

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at A har følgende reduserte trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen til A?

Finn en basis for radrommet til A og søylerommet til A.

b) Bestem også en basis for nullrommet til A.

c) For hvilke α, β er ligningssystemet $A\mathbf{x} = [1, 0, \alpha, \beta]^T$ løsbart? Angi løsningsmengden.

d) Finn en ortonormal basis for søylerommet til A og bestem den minste verdien av

$$\|A\mathbf{x} - [1, 0, 0, 0]^T\|$$

når $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

Oppgave 2

a) Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,15 \\ -0,20 & 1,10 \end{pmatrix}.$$

Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) På en øde øy blir det satt ut $R_0 = 100$ rever og $H_0 = 100$ harer. Etter n måneder er det R_n rever og H_n harer. Vi antar følgende matematiske modell for variasjonen av R_n og H_n:

$$R_{n+1} = 0,70 R_n + 0,15 H_n,$$

$$H_{n+1} = -0,20 R_n + 1,10 H_n.$$

Hvordan går det da med revbestanden og harebestanden når $n \to \infty$?

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til M. (Det oppgis at 2 er en egenverdi av multiplisitet 2.)

b) Gitt differensialligningssystemet

$$(\heartsuit) \qquad \mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, og A er en $n \times n$-matrise med n lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$$

svarende til egenverdiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (ikke nødvendigvis forskjellige). Utled formelen

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{p}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{p}_n$$

for den generelle løsning av ($\heartsuit$).

c) Finn den generelle løsning av differensialligningssystemet

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x}.$$

Oppgave 4

Finn a, b og c slik at kurven definert ved

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

er en ellipse med den største aksen langs vektoren $[3,4]$ og av lengde 2, mens den minste aksen har lengden 1. (Hint: Innfør et passende $x'y'$-koordinatsystem.)

Oppgave 5

La $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet av polynomer av grad høyst 3, og la $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ være avbildningen gitt ved $T(p) = p'$.

a) Begrunn at $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ er en basis for $\mathcal{P}_3$ og at T er en lineæravbildning.

b) Finn matrisen A til lineæravbildningen T med hensyn på basisen B (ordnet i rekkefølgen angitt i **a)**). Hva blir A^4?

Oppgave 6

Vi minner om at to $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* dersom det fins en invertibel matrise P slik at $B = P^{-1}AP$. Vis følgende:

a) Similære matriser har samme rang og samme nullitet.

b) Similære matriser har samme karakteristiske polynom (og samme egenverdier).

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
73 59 17 50

Eksamen i MA 108, *Lineær algebra*
Onsdag 26. november 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensurdato: 17. desember 1997

Oppgave 1

a) For hvilke verdier av r er matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & r \\ 2r & 8 \end{bmatrix}$$

inverterbar? Finn den inverse matrisen for disse verdiene av r.

b) Drøft hvordan antall løsninger for likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x + ry &= r - 2 \\ 2rx + 8y &= r \end{aligned}$$

avhenger av r.

c) Bestem rangen til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + kx_k + \ldots + 100x_{100} &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + \ldots + 2^k x_k + \ldots + 2^{100}x_{100} &= 0 \end{aligned}$$

Finn dimensjonen til løsningsrommet.

Oppgave 2 Betrakt $\mathbb{R}^4$ med Euklidsk indreprodukt. La $W \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

a) Finn en basis for W.

b) Betrakt vektoren

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finn en ortonormert basis for W som har v_1 som første basisvektor.

c) Finn den minste verdien som uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

kan få når $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ varierer i W

Oppgave 3 Det er gitt en kurve C i xy-planet ved likningen

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$$

a) Finn et ortonormert koordinatsystem som forenkler likningen mest mulig.

b) Lag en skisse av kurven C, og angi også x-aksen og y-aksen og aksene i det nye systemet.

Oppgave 4 I vektorrommet av alle funksjoner som er definert på $\mathbb{R}$ lar vi V være underrommet med basis

$$B = \{1, x, x^2, e^x\}$$

La $T : V \to V$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(f(x)) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

(f' og f'' står for henholdsvis derivert og dobbeltderivert).

a) Finn matrisen til T med hensyn på basisen B.

b) Bestem rangen til T (rank of T) og finn en basis for kjernen $\ker(T)$.

Oppgave 5

a) Vis at røttene i likningen
$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha \; ,$$
der α er et vilkårlig reelt tall, ligger på enhetssirkelen ($|z| = 1$) i det komplekse plan.

b) Vis omvendt at om z er et komplekst tall på enhetssirkelen så er $z + \frac{1}{z}$ reell og $-2 \leq z + \frac{1}{z} \leq 2$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Eksamen I MA108 – Lineær Algebra

Antall timer: 6
Antall vekttal: 3. Antall vedlegg: 0
Antall sider bokmål: 3. Antall sider nynorsk: 0.
Ingen tillatte hjelpemidler.
Sensurdato: 23. juni 1997

2. juni 1997

La $\mathcal{R}$ og C stå for hhv. de reelle tall og de komplekse tall. Begrunn alle din svar.

Opgave 1 Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP = D$.

b) Løs systemet af differensiallikninger

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & = & x_1' \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & x_2' \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & x_3' \end{array}$$

med initial betingelsene

$$x_1(0) = 2 \quad x_2(0) = 3 \quad x_3(0) = 0.$$

Opgave 2 Ole reiser til Danmark på ferie og kjøper boller hos en kjøpmann som ikke har prislister. Den første dagen kjøper han 3 rosinboller, 2 fløteboller og 1 tebolle, og må betale tilsammen 11 kr. Neste dag kjøper han 4 rosinboller, 1 fløtebolle og 2 teboller, og betaler tilsammen 15 kr. Den tredje dagen kjøper han kun et stykke av hver bolle og betaler tilsammen 6 kr. Hva koster de tre typene boller pr. stk?

Opgave 3 a) La $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Finn en inverterbar 2×2 matrise P, dens invers P^{-1} og en 2×2 diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) En land med 1.200.000 stemmeberettigede innbyggere har 2 partier X og Y, der i dag 800.000 stemmer på X og 400.000 på Y. Hvert år skifter 70% parti fra X til Y og 50% fra Y til X.

Hvordan blir fordelingen mellom partiene etter 3 år? Hvordan blir fordelingen i det lange løp?

Opgave 4 Identifisere de kjeglesnitt man får fra

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1 - a^2$$

for forskjellige verdier av a.

Skisser kurvene man får for $a = 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

Opgave 5 La V være et vektorrom over $\mathcal{R}$ med indreprodukt $\langle\, ,\, \rangle$, og la v_0 være en fast vektor av lengde 1 i V. La $T : V \to V$ være defineret ved $T(v) = \langle v, v_0 \rangle v_0$.

a) Vis at T er en lineær transformasjon.

b) Vis at $T^2 = T$.

c) Finn rangen av T.

d) Finn $\dim(\ker T)$.

e) Finn determinanten, $\det T$.

f) La v_1 være en vektor ikke proporsjonal med v_0. Vis at $v_1 - T(v_1)$ er ortogonal til v_0.

(Opgave 6 på neste side.)

Opgave 6 La A være en kompleks $n \times n$ matrise slik at $A^* = A$. La $\lambda \in \mathcal{C}$.

a) Vis at λ er et reelt tall hvis og kun hvis $\overline{\lambda} = \lambda$.

b) Vis at $\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle$ når $v \in \mathcal{C}^n$.

c) Vis vha. a) og b) at egenverdiene av A er reelle tall.

La V være vektorrommet av alle *komplekse* funksjoner på formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$, der a og b er vilkårlige komplekse tall og $x \in \mathcal{R}$. La $T : V \to V$ være lineær transformasjonen gitt ved $T(f) = if'$, der $f'(x) = a \cos x - b \sin x$ er derivaten av f.

d) Finn matrisen av T mhp. basisen $\{\sin x, \, i \cos x\}$.

e) Finn egenverdiene og egenvektorene av T.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

Eksamen I MA108: Lineær Algebra

Antall timer: 6
Antall vekttal: 5. Ingen tillate hjælpemidler.
Antall sider bokmål: 3
Antal sider nynorsk: 0
Antall vedlegg: 0
Sensurdato: 17. december 1996

26. november 1996

N.B. La $\mathcal{R}$ stå for de reelle tal.

Opgave 1 La $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Finn en basis til kjernen av $T_A : \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^2$, gitt ved $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^4$.

2. Finn en basis til bildet av T_A.

3. Finn alle løsninger av likningssettet,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x_1 & + & & & & - & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array}$$

Opgave 2 La $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, og $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Vis at determinanten av 4×4 matrisen $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$, uttrykt i blokmatrise form, tilfredstiller

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Opgave 3 La $v_1 = (1,0,\ldots,0), v_2 = (1,1,0,\ldots,0), \ldots, v_n = (1,1,\ldots,1)$ i $\mathcal{R}^n$.

1. Vis at $\{v_1,\ldots,v_n\}$ er en basis for $\mathcal{R}^n$.

2. Ortonormaliser basisen $\{v_1,\ldots,v_n\}$ for $\mathcal{R}^n$ ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 4 La $v_1,\ldots,v_n$ være vektorer i en vektorrom V. Definere en avbildning $T : \mathcal{R}^n \to V$ ved

$$T(a_1,\ldots,a_n) = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

1. Vis at T er en lineær transformasjon.

2. Vis at T er inverterbar hvis og kun hvis $\{v_1,\ldots,v_n\}$ er en basis for V.

Opgave 5 La P_2 være vektorrommet av alle polynomfunksjoner av grad høyst 2, med indreprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ definert ved

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

for f og g i P_2.

1. Vis at avbildningen $T : P_2 \to P_2$, gitt ved $T(f) = f + f' + f''$ når f er i P_2, er en lineær transformasjon.

2. Finn matrisen til $T : P_2 \to P_2$ med hensyn på basisen $\{1, x, x^2\}$.

3. Avgjør om T er inverterbar. Begrunn dit svar.

4. Ortonormaliser basisen $\{1, x, x^2\}$ for P_2 ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 6 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. La $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$, for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^3$, være den assosierte kvadratiske form.

1. Bestem formlen for $q(x_1, x_2, x_3)$.

2. Diagonalisere A.

3. Finn den største og den minste verdien til $q(\mathbf{x})$ på enhetssfæren $||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

4. Vis at egenvektorene av A er ortogonale til hverandre.

5. Bestem den lineær transformasjon T_P av $\mathcal{R}^3$ i sigselv, $\mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x} = \mathbf{y}$ som diagonaliserer $q(\mathbf{x})$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast) vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

EKSAMEN I MA108 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 3. juni 1996 Antall timer: 6

Antall vekttall: 5
Antall sider bokmål: 3
Antall sider nynorsk: 3
Antall vedlegg: 0

Tillatte hjelpemidler:
Utdelt kalkulator

Sensurdato: 24. juni 1996

Oppgave 1

a) Bevis at en 3x3-matrise er ortogonal hvis og bare hvis radvektorene til matrisen danner en ortonormal mengde.

La matrisen P være gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

b) Vis at P er ortogonal.

c) Finn P^{-1}.

d) Finn en 3x3-matrise A som har egenverdiene 6, 12 og 18 og egenvektorene (1, 1, 1), (2, -1, -1) og (0, 1, -1).

Oppgave 2

La U være mengden av alle $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in R^4$ som er slik at $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

a) Vis at U er et underrom av R^4.

b) Vis at $B = \{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ er en basis for U.

c) Finn en basis B' for U som er ortogonal med hensyn på det euklidske indreproduktet for R^4.

d) Finn det punktet i U som har kortest avstand til punktet (1, 0, 0, 0).

e) Finn overføringsmatrisen fra basis B til basis B'.

f) Finn koordinatene til (1, 2, 3, -6) både i basis B og i basis B'.

Oppgave 3

En kantine har 310 faste middagsgjester. På kantinen blir det servert en kjøttrett, en fiskerett og en pastarett. Av de som en dag spiser kjøttretten, velger 20 % kjøttretten neste dag, 40 % velger fiskeretten og 40 % velger pastaretten. Av de som en dag spiser fiskeretten, velger 50 % kjøttretten og 50 % pastaretten neste dag. Av de som en dag spiser pastaretten, velger 40 % kjøttretten, 30 % fiskeretten og 30 % pastaretten neste dag.
Hvor mange gjester spiser kjøttretten, fiskeretten og pastaretten etter en tid?

Oppgave 4

Bruk minste kvadraters metode til å finne likningen for den rette linja som passer best til datasettet

x	0	1	2	3	4
y	-1	2	3	5	6

Oppgave 5

La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

a) Undersøk om A er hermittisk, unitær eller normal.

b) Er matrisen A unitært diagonaliserbar? Begrunn svaret.

c) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

d) Finn om mulig en unitær matrise P som diagonaliserer A.

e) Bevis at alle egenverdiene til en hermittisk matrise er reelle.

Merk: Ved hjelp av tastafon vil du kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisningene som blir gitt.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA108 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 28. november 1995

Antall timer: 6

Antall vekttall: 5
Antall sider bokmål: 3
Antall sider nynorsk: 0
Antall vedlegg: 0

Tillatte hjelpemidler:
Utdelt kalkulator

Sensurdato: 19. desember 1995

Oppgave 1

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

er gitt.

a) Finn den inverse matrisen til A.

b) For hvilke s ligger løsningen av likningssystemet

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ -3x + 6y + 6z &= 3s \\ 3x - 5y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

i planet $x + y + z = 21$?

c) Finn en ortonormal basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 2

La V være indreproduktrommet av funksjoner av typen

$$f(x) = a + bx + c \sin x$$

der a, b ∈ R. Indreproduktet i V er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

a) Vis at $\{1, x, \sin x\}$ er en basis for V.

b) Finn en ortonormal basis for underrommet utspent av de to funksjonene $f(x) = 1$ og $g(x) = x$.

Oppgave 3

Matrisen M er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de to egen-rommene E_1 og E_2 til M.

b) Finn matrisen P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen.

c) Vis at en vilkårlig $\underline{v} \in R^3$ kan skrives entydig som den sum $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ der $\underline{v}_1 \in E_1$ og $\underline{v}_2 \in E_2$.

Oppgave 4

a) Overfør kjeglesnittet

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

til standard form, finn ut hvilket kjeglesnitt det er.

b) Tegn kjeglesnittet i koordinatsystemet som har x og y som koordinater.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.
Plasser løsningene i det komplekse planet.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA08 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 1. juni 1995 Antall timer: 6

Antall vekttall: 5
Antall sider bokmål: 3
Antall sider nynorsk: 3
Antall vedlegg: 0

Tillatte hjelpemidler:
Utdelt kalkulator

Sensurdato: 22. juni 1995

Oppgave 1

La $t \in R$ og la

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn ut om matrisen A er inverterbar.
b) Finn rangen til matrisen A.
c) Finn en basis for løsningsrommet til $A\underline{x} = \underline{0}$.
d) Finn kolonnevektorer i A som danner basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 2

La $W \subset R^4$ være løsningsrommet til likningssettet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

a) Finn en basis for W.
b) Finn en ortonormal basis for W der en av basisvektorene er parallell med vektoren $\underline{v} = (1, -1, 1, -1)$. (Basisen skal være ortonormal med hensyn på det eulikdske indreproduktet for R^4.)
c) Finn den minste verdien av uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

når $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Finn en matrise P som diagonaliserer A ortogonalt.
c) Overfør den kvadratiske likningen

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y + 8 = 0$$

til standard form ved hjelp av koordinatskifte.
d) Tegn kjeglesnittet i oppgave c).
e) La $\underline{x}^T A \underline{x}$ være den assosierte kvadratiske formen til likningen for et kjeglesnitt.
Hvordan kan vi bare ved hjelp av egenverdiene til A se hvilket kjeglesnitt det er?

Oppgave 4

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom der dim V > 0.
La $T : V \to V$ være en lineær transformasjon som er slik at

$$\ker(T) = R(T)$$

a) Vis at T ikke er enentydig.
b) Vis at dimensjonen til V er et partall.
c) La dimensjonen til V være et positivt partall.
Vis at det finnes en lineær transformasjon $T : V \to V$ som er slik at $\ker(T) = R(T)$.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$iz^3 = 8$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.
Plasser løsningene i det komplekse planet.