Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Merk at for å være tydelig, tar jeg med flere mellomregninger her enn studentene ventes å bruke!

Kapittel 8

7 Oppgaven er å finne ut om den oppgitte funksjonen $T : P_2 \to P_2$ er en lineær transformasjon. Vi kommer til å bruke teorem 8.1.1, og sjekke at:

1. $T(0) = 0$; 0 er polynomet $0 + 0x + 0x^2$.
2. $T(p(x) - q(x)) = T(p(x)) - T(q(x))$; hvor $p(x)$ og $q(x)$ er villkårlige annengrads-polynomer. I praksis vil vi bruke $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

a) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$

1. $T(0) = T(0 + 0x + 0x^2) = 0 + 0(x+1) + 0(x+1)^2 = 0$; OK
2. (Denne biten er knotete, men fullt overkomlig om man er systematisk).

$$\begin{aligned}
T(p(x) + q(x)) &= T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2) \\
&= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(x+1) + (a_2 + b_2)(x+1)^2) \\
&= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)^2 \\
&= T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

OK

Vi slutter at T er en lineær transformasjon.

b) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$.
Her ser vi at $T(0) = T(0 + 0x + 0x^2) = (0+1) + 0(x+1) + 0(x+1)^2 = 1 \neq 0$.
Altså er T ikke en lineær transformasjon.

16 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er lineærtransformasjonen gitt ved

$$T(x,y) = (x - 3y, -2x + 6y) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^T$$

(vi dropper transponeringen i det som følger, og regner som at vektorene er kolonne-vektorer. Bildet av T, $R(T)$, er mengden av alle vektorer $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ slik at det finnes $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

der $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Dette er noe vi kan! Setter opp en utvidet matrise og utfører radreduksjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & a \\ -2 & 6 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & a \\ 0 & 0 & b+2a \end{bmatrix}$$

Da ser vi at (a, b) er i $R(T)$ hvis og bare hvis $b + 2a = 0$.

a) For $(a, b) = (1, -2)$, har vi $b + 2a = -2 + 2 \cdot 1 = 0$, så $(1, -2)$ ligger i $R(T)$.

b) For $(a, b) = (3, 1)$, har vi $b + 2a = 1 + 2 \cdot 3 = 7$, så $(3, 1)$ ligger ikke i $R(T)$.

c) For $(a, b) = (-6, -2)$, har vi $b + 2a = -2 + 2 \cdot (-6) = -14$, så $(3, 1)$ ligger ikke i $R(T)$.

$(-2, 4)$ er i $R(T)$.

Eventuelt kan vi se at en basis kolonnerommet til $\begin{bmatrix} 1 & -3 & a \\ 0 & 0 & b+2a \end{bmatrix}$, som er isomorft med $R(T)$, er vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vektoren i oppgave a er den eneste som er et skalart multippel av denne.

Vedlagt: Løsningsforslag for eksamensoppgaver

V09 Oppgave 3

V10 Oppgave 4

V12 Oppgave 4

V13 Oppgave 3

V14 Oppgave 2

V09

Oppgave 3

a) Første kolonne i A:

$$[T(1)]_S = [T_2(T_1(1))]_S = [T_2(x \cdot 1)]_S = [1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andre kolonne i A:

$$[T(x)]_S = [T_2(x \cdot (x+1))]_S = [2x+1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne i A:

$$[T(x^2)]_S = [T_2(x \cdot (x^2+2x+1))]_S = [3x^2+4x+1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Altså er matrisen A det den utgir seg for å være.

b) Siden A er triangulær, kan vi lese egenverdiene direkte av diagonalen. De er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Denne matrisen har følgelig tre distinkte egenverdier. Vi kan dermed finne tre lineært uavhengige egenvektorer for A. Disse utgjør da en basis for $\mathbb{R}^3$, og gir en diagonalisering av A.

Egenvektor tilhørende λ_1:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_1.

egenvektor tilhørende λ_2:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_2.

egenvektor tilhørende λ_3:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}5 & 8 & 2\end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_3.

Dermed er

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \tag{3}$$

en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

c) Her skal vi dra nytte av kunnskap om forholdet mellom egenskaper til vektorer og deres kooridnatvektorer.

En vektor er en egenvektor for en operator hvis og bare hvis koordinatvektoren uttrykt i en basis $\mathcal{B}$ er en egenvektor for matrisen til operatoren i den samme basisen $\mathcal{B}$. Vektoren og koordinatvektoren tilhører i så fall samme egenverdi.

Punkt (3) gir oss egenvektorene for matrisen $[T]_{SS}$. De korresponderende vektorene i P_2 er da egenvektorer for T. Vi finner disse på følgende måte:

Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_1(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1,$$

$\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_2(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 + x$$

og $\mathbf{x}_3$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_3(x) = 5 \cdot 1 + 8 \cdot x + 2 \cdot x^2 = 5 + 8x + 2x^2.$$

Dette gir oss en basis

$$\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$

for P_2 bestående av egenvektorer for T.

La oss nå finne matrisen til T i denne basisen. Første kolonne:

$$[T(p_1(x))]_{\mathcal{B}} = [p_1(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Andre kolonne:

$$[T(p_2(x))]_{\mathcal{B}} = [2 \cdot p_2(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne:

$$[T(p_3(x))]_{\mathcal{B}} = [3 \cdot p_3(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En kan eventuelt begrunne dette svaret med at $\mathcal{B}$ er en basis for P_2 bestående av egenvektorer for T. I den situasjonen er $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen.

N 10

Oppgave 4. **(a)** Matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$ er definert ved

$$[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = \left([T(x)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(x^2)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(x+\sin x)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(\cos x)]_{\mathcal{B}_W}\right).$$

Vi må med andre ord anvende T på hver av de fire basiselementene i $\mathcal{B}_V$, og så finne koordinatvektorene med hensyn på basisen $\mathcal{B}_W$ ved å uttrykke resultatet som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_W$. Siden

$$\begin{aligned}
T(x) &= 1 \\
&= 1\cdot 1 + 0\cdot(x+4) + 0\cdot \sin x + 0\cdot(2x+\cos x) \\
T(x^2) &= 2x \\
&= (-8)\cdot 1 + 2\cdot(x+4) + 0\cdot\sin x + 0\cdot(2x+\cos x) \\
T(x+\sin x) &= 1+\cos x \\
&= 9\cdot 1 + (-2)\cdot(x+4) + 0\cdot\sin x + 1\cdot(2x+\cos x) \\
T(\cos x) &= -\sin x \\
&= 0\cdot 1 + 0\cdot(x+4) + (-1)\cdot\sin x + 0\cdot(2x+\cos x)
\end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned}
[T(x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
[T(x^2)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix}-8\\2\\0\\0\end{pmatrix} \\
[T(x+\sin x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix}9\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \\
[T(\cos x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dette gir

$$[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En isomorfi er en lineærtransformasjon som er både injektiv (dvs en-til-en) og surjektiv (dvs på). For å avgjøre om T tilfredsstiller begge disse kravene kan man gå frem på to måter.

Den mest tidkrevende er å sjekke direkte. For å sjekke injektivitet må man da avgjøre om T sender ulike vektorer på ulike bilder, evt om kjernen til T bare inneholder nullvektoren (husk at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen inneholder kun nullvektoren). For å sjekke surjektivitet må man ta en tilfeldig vektor i W og vise at den treffes av en vektor i V. Strengt tatt holder det å vise at T *enten* er injektiv *eller* surjektiv, siden $\dim V = \dim W$. Et av resultatene sier nemlig at siden V og W har samme dimensjon (nemlig 4), så er T injektiv hvis og bare hvis den er surjektiv (men da må man selvsagt henvise til dette).

Den minst tidkrevende og mest elegante måten å avgjøre om T er en isomorfi på er å se på matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$. Den er inverterbar (determinanten er ulik null), så svaret på spørsmålet er ja; T er en isomorfi.

(b) For å finne $[v]_{\mathcal{B}_V}$ uttrykker vi v som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_V$:

$$2x + 3x^2 + 7\sin x = (-5)\cdot x + 3\cdot x^2 + 7\cdot(x+\sin x) + 0\cdot\cos x.$$

Da får vi

$$[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix}-5\\3\\7\\0\end{pmatrix}$$

For å finne $[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$ kan man anvende T på v, og så finne koordinatvektoren for $T(v)$ ved å uttrykke denne som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_W$. Men husk at overføringsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$ nettopp har den egenskapen at den tar en koordinatvektor til en koordinatvektor. Så det beste er å bruke denne matrisen og koordinatvektoren vi nettopp fant:

$$\begin{aligned}
[T(v)]_{\mathcal{B}_W} &= [T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_V} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

12

Oppgave 4(a). La $\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ være en tilfeldig vektor i $\mathbb{R}^3$. Da er

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} r_1 & 0 & r_1 \\ r_2 & r_3 & r_2 \end{pmatrix}\right),$$

så transformasjonen er surjektiv. Siden

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

er det ikke slik at transformasjonen alltid sender ulike vektorer på ulike vektorer. **Derfor er den ikke injektiv.**

Oppgave 4(b). For å minske notasjonen, kaller vi vektorene i basisen $\mathcal{B}$ for v_1, v_2, v_3, v_4 (i samme rekkefølge som i $\mathcal{B}$). Videre kaller vi vektorene i basisen $\mathcal{B}'$ for w_1, w_2, w_3 (i samme rekkefølge som i $\mathcal{B}'$). Da er matrisen $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ gitt ved

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [(T(v_1))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_2))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_3))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_4))_{\mathcal{B}'}].$$

Vi må altså ta hver v_i, og skrive $T(v_i)$ som en lineærkombinasjon av vektorene w_1, w_2, w_3 i basisen $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -w_2 + w_3 \\
T(v_2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -w_2 + w_3 \\
T(v_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= w_1 + w_2 - w_3 \\
T(v_4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -w_1 + w_3
\end{aligned}$$

Koordinatvektorene $(T(v_i))_{\mathcal{B}'}$ er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
(T(v_1))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(T(v_2))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(T(v_3))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
(T(v_4))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nå har vi kolonnevektorene i matrisen $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, så vi får

$$\Big(\; 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \; \Big)$$

V13 oppg 3

a) Da P_2 er en ikke-tom delmengde av vektorrommet av funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ kan vi bruke resultatet som sier at da er det nok å vise at P_2 er lukket mhp. addisjon og skalarmultiplikasjon.

La $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ og $c \in \mathbb{R}$.

Addisjon:

$$p(x)+q(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+b_0+b_1x+b_2x^2 = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \in P_2.$$

Skalarmultiplikasjon:

$$c \cdot p(x) = c(a_0 + a_1x + a_2x^2) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 \in P_2.$$

Betrakt P_2 som et indreproduktrom ved at

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

La $p_1(x) = x - x^2$ og $p_2(x) = 1 - x^2$ og sett $W = \text{Span}\{p_1(x), p_2(x)\}$. La $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen gitt ved

$$T(q(x)) = \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix}.$$

b) Dette følger av at indreprodukt er lineær i begge variabeler og dermed spesielt i første variabel. Har at $\langle aq(x) + br(x), p(x)\rangle = a\langle q(x), p(x)\rangle + b\langle r(x), p(x)\rangle$. Får dermed at

$$\begin{aligned}
T(aq(x)+br(x)) &= \begin{bmatrix} \langle aq(x)+br(x), p_1(x)\rangle \\ \langle aq(x)+br(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\langle q(x), p_1(x)\rangle + b\langle r(x), p_1(x)\rangle \\ a\langle q(x), p_2(x)\rangle + b\langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\langle q(x), p_1(x)\rangle \\ a\langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\langle r(x), p_1(x)\rangle \\ b\langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \langle r(x), p_1(x)\rangle \\ \langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} \\
&= aT(q(x)) + bT(r(x)).
\end{aligned}$$

for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $q(x), r(x) \in P_2$.

c) Har at

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \{q(x) \in P_2 \mid T(q(x)) = 0\} \\
&= \left\{ q(x) \in P_2 \,\middle|\, \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{q(x) \in P_2 \mid \langle q(x), p_1(x)\rangle = 0 = \langle q(x), p_2(x)\rangle\} \\
&= \{q(x) \in P_2 \mid \langle q(x), k_1p_1(x) + k_2p_2(x)\rangle = 0 \ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{q(x) \in P_2 \mid \langle q(x), p(x)\rangle = 0 \ \forall\, p(x) \in W\} \\
&= W^\perp
\end{aligned}$$

For å finne en ortogonal basis for P_2 kan vi bruke at i et indreproduktrom så er en ortogonal mengde lineært uavhengig. Det er dermed nok å finne en ortogonal mengde med 3 vektorer siden $\dim P_2 = 3$. Merk at $p_1(x)$ og $p_2(x)$ er ortogonale da $\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = 0$. Siden $\operatorname{Ker} T = W^{\perp}$ ser vi at det er nok å velge $p_3 \neq 0 \in \operatorname{Ker} T$. Vi kan f.eks. velge $p_3(x) = x^2 + x$, da vil $\{p_1, p_2, p_3\}$ være en ortogonal basis for P_2.

UPPGAVE 2: V14

a.)

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_1"'] & P_1 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "{[T]_{\tilde{B},B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "T_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p(x) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_1"'] & T(p(x)) \\ (p(x))_B \arrow[r, "{[T]_{\tilde{B},B}}"] & (T(p(x)))_{\tilde{B}} \arrow[u, "T_2"'] \end{tikzcd}$$

DVS: $T(p(x)) = T_2([T]_{\tilde{B},B}(T_1(p(x))))$ HVOR

·) T_1 ER GITT VED $T_1: P_2 \to \mathbb{R}^3$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \longrightarrow (p(x))_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

⇝ T_1 TILORDNER HVERT POLYNOM $p(x) \in P_2$ DENS KOORDINATVEKTOR MED HENSYN PÅ BASIS B $(p(x))_B$

⇝ T_1 ER EN ISOMORFI (SURJ+INJ ⇝ INVERTERBAR)

MED $T_1^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow b_0 + b_1x + b_2x^2$$

·) T_2 ER GITT VED $T_2: \mathbb{R}^2 \to P_1$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \longrightarrow c_0(1-x) + c_1(1+x)$$

⇝ T_2 ER EN ISOMORFI MED $T_2^{-1}: P_1 \to \mathbb{R}_2$

$$q(x) = d_0 + d_1x \longmapsto (q(x))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \frac{d_0 - d_1}{2} \\ \frac{d_0 + d_1}{2} \end{pmatrix}$$

·) $[T]_{\tilde{B},B}$ ER TRANSISJONSMATRISEN TIL T RELATIV TIL B OG $\tilde{B}$

⇝ $[T]_{\tilde{B},B}$ ER EN 2x3 MATRISE

$$[T]_{\tilde{B},B} = ((T(1))_{\tilde{B}}, (T(x))_{\tilde{B}}, (T(x^2))_{\tilde{B}})$$

$\Rightarrow [T]_{\tilde{B},B}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{x} \longmapsto [T]_{\tilde{B},B}\vec{x}.$$

$$\left.\begin{aligned} &⇝ T(1) = 2\cdot x\cdot 0 - 4\cdot 1 = -4 = -2(1-x) - 2(1+x) \Rightarrow (T(1))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &T(x) = 2x\cdot 1 - 4\cdot x = -2x = 1\cdot(1-x) - 1(1+x) \Rightarrow (T(x))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &T(x^2) = 2x\cdot 2x - 4x^2 = 0 = 0\cdot(1-x) + 0(1+x) \Rightarrow (T(x^2))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [T]_{\tilde{B},B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE 2. (V14)

b) $R(T) = \{T(p(x)) \mid p(x) \in P_2\}$

$= \{T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\overset{(a)}{=} \{a_0(-4) + a_1(-2x) + a_2 \cdot 0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{-4a_0 - 2a_1x \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{b_0 + b_1x \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\} = P_1.$

c) ·) $R(T) = P_1 \Rightarrow$ T ER SURJEKTIV

·) $T(ax^2) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \ker(T) \neq \{0\} \Rightarrow$ T ER IKKE INJEKTIV

·) T ER SURJEKTIV, MEN IKKE INJEKTIV $\Rightarrow$ T ER INGEN ISOMORFI.

d) ·) $T(2x-4x^2) = 2x(2-8x) - 4(2x-4x^2) = 4x - 16x^2 - 8x + 16x^2 = 4x - 8x = -4x.$

·) $T_2([T]_{\tilde{B},B}(T_1(2x-4x^2)))$

$\rightsquigarrow T_1(2x-4x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$[T]_{\tilde{B},B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$T_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(1-x) - 2(1+x) = 2 - 2x - 2 - 2x = -4x$

$\Rightarrow T_2([T]_{\tilde{B},B}(T_1(2x-4x^2))) = T_2\left([T]_{\tilde{B},B}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = T_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4x.$

HER BRUKES: $T(p(x)) = T_2([T]_{\tilde{B},B}(T_1(p(x)))).$

e) $T: P_2 \to P_1$ $\qquad\qquad$ $\tilde{T}: P_2 \to P_2$

$p(x) \to 2xp'(x) - 4p(x)$ $\qquad\qquad$ $p(x) \to 2xp'(x) - 4p(x)$

DEN ENESTE FORSKJELLEN MELLOM T OG $\tilde{T}$ ER VERDIOMRÅDET ($P_1 \subseteq P_2$ MEN $P_1 \neq P_2$)

·) KJERNEN ER ET UNDERROM AV DEFINISJONSMENGDEN

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ker(T) = \ker(\tilde{T}) \\ T \text{ IKKE INJ} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{T}$ IKKE INJ

·) BILDET ER ET UNDERROM AV VERDIOMRÅDET

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} R(T) = R(\tilde{T}) \\ P_1 \subseteq P_2 \text{ MEN } P_1 \neq P_2 \\ T \text{ SURJEKTIV} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{T}$ IKKE SURJ.