Løsningsforslag MA1202/6202 V2016

Øving 11

2009 V

Oppg 2 b)

$$\mathbf{p}_1 = P\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}.$$

Stabile tilstandsvektorer $\mathbf{p}$ er karakterisert ved ligningen

$$P\mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \text{i.e.} \quad (P - I)\mathbf{p} = 0.$$

Vi løser nå denne ligningen ved radoperasjoner.

$$P - I = \begin{bmatrix} -.75 & .5 \\ .75 & -.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -.75 & .5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En mulig løsning av ligningen er vektoren $(1/2, 3/4)$. Summen av komponentene i denne vektoren er $5/4$. Vi multipliserer dermed den beskrevne løsningen med $4/5$, og får vektoren

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix},$$

som er en løsning av ligningen, og i tillegg en godkjent tilstandsvektor.

Det er flere måter å se på spørsmålet om det finnes flere stabile tilstandsvektorer.

- Nullrommet til $P - I$ har dimensjon 1. Dermed kan det kun finnes 1 vektor med komponentsum 1.
- Vi kan se på den stabile tilstandsvektoren som en løsning av ligningssystemet

$$-.75p_1 + 0.5p_2 = 0, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

Dette systemet har 1 unik løsning, siden systemet har rang 2.

2008V

Oppgave 3 a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Det er berre 2 lineært uavhengige kolonner (eller rader), så rang$(M) = 2$. Difor er nulliteten lik $5-2=3$, dvs. nullrommet er 3-dimensjonalt. Difor er eigenrommet til eigenverdien $\lambda = 0$ 3-dimensjonalt. Dermed har vi 5 lineært uavhengige eigenvektorar, altså er M diagonaliserbar.

<u>Merknad</u> For den som bruker tida til å finne eigenvektorar, oppgir vi følgande

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda=-1, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\4\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda=1, \quad \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \lambda=0$$

Vi har

$$P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix}$$

(der kolonnene i P er gitt ved vektorane ovanfor, men du treng jo ikkje å bestemme P i denne oppgåve!)

Det er klart at $D^3 = D$, og derav $M^3 = M$

c) Skriv $v_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_1 = Mv_0$, $v_2 = M^2 v_0$, osv

Då er
$$v_1 = Mv_0 = M^3 v_0 = v_3 = v_5 = v_7 = \cdots v_{1001}$$
$$v_2 = M^2 v_0 = M^4 v_0 = v_4 = v_6 = v_8 \cdots$$

Men vi treng berre at

$$v_{1001} = v_1 = Mv_0 = \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\0\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$$

altså inga fluge i område 3, medan dei er likt fordelt i dei andre fire områda

[2004 V]

Oppgave 3

Se på

$$\det\left(\frac{3}{2}I-L\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -4 & -1\\ -\frac{9}{17} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=-1\left(\frac{27}{136}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}-\frac{36}{17}\right)$$

$$=-\frac{27}{136}+\frac{3}{2}\left(\frac{153-144}{68}\right)$$

$$=-\frac{27}{136}+\frac{27}{136}=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\frac{3}{2}$ er en løsning av den karakteristiske likningen $\det(\lambda I-L)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\frac{3}{2}$ er en egenverdi for L.

Siden to påfølgende elementer i rad 1 i L er $\neq 0$ vet vi at λ_1 er den positive, dominante egenverdien til L. Videre, siden $\lambda_1 > 1$, kan vi av dette slutte at populasjonen på sikt vil være voksende.

2001V oppg 4

La a_n = antall i gruppe 1

b_n = —— " —— 2

c_n = —— " —— 3

Nye individer i gruppe 1 blir

$$a_{n+1} = 0 \cdot a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{5}{6} c_n$$

Nye i gruppe 2 blir

$$b_{n+1} = \frac{9}{10} a_n$$

Nye i gruppe 3 blir

$$c_{n+1} = \frac{11}{15} b_n.$$

a) Dette gir Lesley-matrise

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{9}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{15} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$P_L(\lambda) = \lambda^3 - \frac{9}{20}\lambda - \frac{11}{20} = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{11}{20}\right)$$

$\lambda_1 = 1$ er reell egenverdi

$\lambda^2 + \lambda + \frac{11}{20} = 0$ gir $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{10}}$

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{11}{20}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

c) For å finne egenvektor til $\lambda_1 = 1$ får vi systemet med matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{9}{10} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{15} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{50}{33} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En egenvektor blir $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 33 \end{pmatrix}$

La $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$ være egenvektorene til λ_2 og λ_3.

$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ så $\vec{X}_n = L^n \vec{X}_0$

Vi kan skrive $\vec{X}_0 = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3$,

så $\vec{X}_n = r\vec{v}_1 + \lambda_2^n s\vec{v}_2 + \lambda_3^n t\vec{v}_3$.

Siden $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$ vil

$\vec{X}_n \longrightarrow r\vec{v}_1$ når n vokser.

Dvs bestanden stabiliserer seg mot en fordeling $r\begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 33 \end{pmatrix}$.