MA1202, V2016, ØVING 2

Oppg. 4.51

I følge Ex. 2 på side 187 kan en bruke Thm.2.3.8, dvs vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

har determinant $\neq 0$. Determinanten blir:

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

Så lineært uavhengig for $\lambda \neq 1, 2, -3$.

Oppg. 4.55

Anta

$$(*) \quad k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

(i) Hvis $k_3 \neq 0$ får vi at

$$v_3 = -1/k_3(k_1 v_1 + k_2 v_2)$$

i strid med at $v_3 \notin span\{v_1, v_2\}$.

(ii) Hvis $k_3 = 0$, må $k_1 = k_2 = 0$ siden $\{v_1, v_2\}$ er lineært uavhengig.

Så eneste måte (*) er oppfylt er når $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, altså er $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineært uavhengig.

Oppg. 4.68

Thm.2.3.8 sier at $\{v_1, \cdots v_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis den tilhørende determinant er $\neq 0$. Determinantene blir

a) 6

b) 26

c) 0

d) 0

Altså basis i a) og b), men ikke i c) og d).

4.60 a)

$$4\cdot(3\cos^2 x)+3\cdot(4\sin^2 x)-2\cdot 6=0$$

Så $\{3\cos^2 x, 4\sin^2 x, 6\}$ er lin. avhengig.

b) Kan se på Wronski-determinanten

$$\begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \sin x \neq 0$$

så lin. uavhengig.

Direkte:

$$Ax + B\sin x = 0$$

Deriver $\quad A + B\cos x = 0$

— " — $\quad -B\sin x = 0$

Så $B=0 \Rightarrow A=0$.

c) Wronski:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 0 & -\sin x & -2\sin 2x \\ 0 & -\cos x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 4\sin x\cos 2x - 2\cos x\sin 2x$$

$$= -4\sin^3 x$$

Kan også se på

$$A + B\cos x + C\cos 2x = 0$$

sett inn $x = 0, \pi/3, \frac{\pi}{2}$ som gir systemet

$$A + B + C = 0$$

$$A + \frac{\sqrt{3}}{2}B + \frac{1}{2}C = 0$$

$$A - B + C = 0$$

Som bare har løsning $A = B = C = 0$

d) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
Så lin. avhengig

e) $(x-2)^2 - (x^2-4x) - \frac{1}{3}\cdot 12 = 0$
Så lin. avhengig.

f) En mengde som har med 0 er alltid lineært avhengig.

Oppg. 4.69

Her kan en bruke koordinatene mhp standard basis for P_2.
a) Koordinatvektorene blir

$$\begin{aligned} v_1 &= (2,-4,1) \\ v_2 &= (3,2,-1) \\ v_3 &= (1,6,-2) \end{aligned}$$

og den tilsvarende determinanten blir 0, dvs lineært avhengige.
b) Koordinatvektorene blir

$$\begin{aligned} v_1 &= (3,2,-1) \\ v_2 &= (0,1,5) \\ v_3 &= (2,-4,1) \end{aligned}$$

og den tilsvarende determinanten blir 85, dvs lineært utavhengige.

Oppg. 4.74

a) Vi må løse vektorlikningen

$$k_1(3,2,1) + k_2(-2,1,0) + k_3(5,0,0) = (3,4,3)$$

som er det samme som å løse systemet med matrise

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan gir matrisa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dvs $k_1 = 3$ $k_2 = k_3 = -2$.

Oppg. 4.75

a) Her har vi standard basis for P_2, så
$(p)_S = (3, 2, -4)$.

b) Må finne c_i slik at

$$3 - x - 2x^2 = c_1(1+x) + c_2(1+x^2) + c_3(x+x^2)$$

Ved å sammenlikne koeffisienter får vi systemet

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad\quad &= 3 \\ c_1 \quad\quad + c_3 &= -1 \\ c_2 + c_3 &= -2 \end{aligned}$$

som har løsning $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -3$, dvs
$(p)_S = (2, 1, -3)$.

Oppg. 4.86

Systemet har matrise

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gauss-Jordan gir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{aligned} x_1 - 1/3x_2 \quad\quad + 1/6x_4 &= 0 \\ x_3 + 1/4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1/3x_2 - 1/6x_4, x_2, -1/4x_4, x_4) \\ &= x_2(1/3, 1, 0, 0) + x_4(-1/6, 0, -1/4, 1). \end{aligned}$$

Så $\{(1/3, 1, 0, 0), (-1/6, 0, -1/4, 1)\}$ er en basis.

Oppg. 4.90

a) Vi har $2x + 4y - 3z = 0$ dvs $z = 2/3x + 4/3y$.
Så

$$(x, y, z) = x(1, 0, 2/3) + y(0, 1, 4/3)$$

Dvs $\{(1, 0, 2/3), (0, 1, 4/3)\}$ er en basis.

c)

$$(x, y, z) = t(4, 2, -1)$$

Så $\{(4, 2, -1)\}$ er en basis.

Oppg. 4.91

c)

$$(a, b, c, d) = (a, -a, a, -a) = a(1, -1, 1, -1)$$

Altså er $\{(1, -1, 1, -1)\}$ en basis, dvs dim=1.

Oppg. 4.93

Basis blir $\{1, x^2, x^3, x^4\}$, dvs $dim = 4$.