

(1)

Løsningsforslag øving 3
 MA1202/6202 V2016

104a)

$$k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 = \vec{w} \quad \text{gir}$$

$$k_1(1,0) + k_2(0,1) = (-4,3)$$

$$\text{der } k_1 = -4 \quad k_2 = 3$$

$$(\vec{w})_S = (-4,3).$$

Her er S = naturlig basis for $\mathbb{R}^2$.

104b Skal løse

$$k_1(1,-1) + k_2(2,5) = (3,7)$$

der

$$k_1 + 2k_2 = 3$$

$$-k_1 + 5k_2 = 7$$

$$k_1 = \frac{1}{7} \quad k_2 = \frac{10}{7}$$

$$\text{Så } (\vec{w})_S = \left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

1066 $k_1 \vec{p}_1 + k_2 \vec{p}_2 + k_3 \vec{p}_3 = \vec{p} \quad \text{gir}$

$$k_1(1-x) + k_2(x+x^2) + k_3(1-x^2) = 2+x-x^2.$$

Så

$$k_1 + k_3 = 2$$

$$-k_1 + k_2 = 1$$

$$k_2 - k_3 = -1.$$

$$\text{der } k_1 = 0 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 2$$

113 a) Siden $\dim V = 2$ er det nok $\circ$
å sjekke at $\{g_1, g_2\}$ er lineært
uavhengig:

$$k_1(2\sin x + \cos x) + k_2 \cdot 3\cos x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2k_1 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0.$$

Så $\{g_1, g_2\}$ er lineært uavhengig
og dermed en basis.

b) Siden B er den "naturlige" basis for V
blir

$$P_{B' \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$c) \text{ Så } P_{B \rightarrow B'} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$d) [h]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Så } [h]_{B'} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$e) \text{ Kontroll } g_1 - 2g_2 = (2\sin x + \cos x) - 2 \cdot 3\cos x = 2\sin x - 5\cos x. \text{ OK}$$

131a Skal løse

$$k_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{der } 5k_1 + k_2 &= 1 \\ -k_1 + 5k_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{der } k_1 = \frac{5}{26} \quad k_2 = \frac{1}{26}$$

Så $\vec{b}$ er med kolonneområdet til A .

132 a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

133b ii) Matrisa til systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $x_3 = s$ kan velges fritt

$$x_1 = -s - 2$$

$$x_2 = -s + 7$$

ii) Den er $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ en løsning, så

løsning av homogenlikning blir $\vec{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

134a

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $x_2 = r$ og $x_3 = s$ kan velges fritt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oppg 139a Vi bruker metoden fra 14
 EX10, side 223, så ser på
 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ledende 1-fall i søyle 1, 2, 4, så
 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ blir en basis.

La $\vec{w}_1 \dots \vec{w}_4$ være søylevektorene
 svarende til $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_4$.

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow) \quad x_1\vec{w}_1 + \dots + x_4\vec{w}_4 = \vec{0}$$

$$\text{Men } A\vec{x} = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow) \quad R\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (\Leftrightarrow) \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 0 & x_3 &= S \text{ fritt valgt} \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= 0 & x_2 &= -\frac{3}{2}S \\ x_4 &= 0 & x_1 &= -x_2 - x_3 \\ & & &= \frac{1}{2}S \\ & & & x_4 = 0 \end{aligned}$$

Insatt får vi

$$S\left(\frac{1}{2}\vec{w}_1 - \frac{3}{2}\vec{w}_2 + \vec{w}_3\right) = \vec{0}$$

$$\text{Så } \vec{w}_3 = -\frac{1}{2}\vec{w}_1 + \frac{3}{2}\vec{w}_2$$

$$\vec{v}_3 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{3}{2}\vec{v}_2$$

og dermed

148 Q1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang = antall ledende 1-tall = 2

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff R\vec{x} = \vec{0}$$

$\iff x_3, x_4$ og x_5 kan velges fritt

$$x_1 = -x_3 - 2x_4 - x_5, \quad x_2 = -x_3 - x_4 - 2x_5$$

Så $\text{null}(A) = \underline{3}$. $\text{Rank}(A) + \text{null}(A) = 5 = \text{Antall spårer}$

150a

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A) = 3$$

$$\dim \text{Nul}(A) = \dim \text{Nul}(T) = 0$$

150d

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col} A = \text{Rank } A = 2$$

$$\dim \text{Nul}(A) = 6 - \text{Rank } A = 4$$

$$\dim \text{Nul}(A^T) = 5 - \text{rank } A^T = 3$$

151 a) Maks rank = 4

$$\text{Min nullitet} = 6 - 4 = 2$$

b) Maks rank = 5

$$\text{Min nullitet} = 0$$

c) Maks rank = 4

$$\text{Min nullitet} = 0$$