

Kap 5. oppg 2:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\vec{x}$$

Så $\vec{x}$ er egenvektor med egenverdi -3 .

Oppg 6b

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -6 & -12 \\ 0 & \lambda-3 & -10 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+2)$$

Oppg 6d

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 4 & -13 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2$$

Oppg 7b Egenverdien er
opplyst 0, 3, -2

Oppg 7d Vis skal løse

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Hvis det er heltallige løsninger
må de være faktorer i konstant leddet.
Så vi prøver med ± 1 og ± 2 .

Ser at $\lambda_1 = 2$ blir en løsning og

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

De andre løsningene er gitt ved

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ der ingen reelle løsninger

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ \text{der } \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \text{eneste} \\ \text{reelle} \\ \text{egenverdi} \end{array}$$

Oppg 5.8b

i) $\lambda = 0$ gir matrisa

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -12 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som svarer til $x_2 = 0$ $x_3 = 0$

deres $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ er en basis

ii) $\lambda = 3$ gir matrisa

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deres $x_1 - 2x_2 = 0$ $x_3 = 0$.

Basis blir $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\lambda = -2$ gir matrisa

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ deres } \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ blir basis

Oppg 5.8.d

i) $\lambda_1 = 2$ gir matrisa

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

der $x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0$ $x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$.

Basis blir $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Oppg 18 Hvis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A.$$

Oppgave 5.28 Gitt at

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda+3)^3(\lambda-4)$$

a) p har grad 6, så A er 6×6 -matrise

b) $\lambda = 0$ er egenverdi,

så $\det A = 0$, A er ikke invertibel.

c) Egenverdier er $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 4$

Så 3 egenverdier.

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1202/MA6202 VÅR 2011

Oppgave 1. (a) Vi radreduserer matrisen på en måte som er gyldig for alle t (vi unngår å dele noe sted på et uttrykk som inneholder t , for å unngå å dele på null):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & t & 1+2t \\ 1 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R1-2R2, R3-tR2} \begin{pmatrix} 0 & t-2 & 1-2t \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & -t & 1-2t^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R1+R3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2-2t-2t^2 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & -t & 1-2t^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{-R1/2, -R3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & t & 2t^2-1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R3-tR2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & -t^3+t^2+t-1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2t \\ 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 0 & 0 & -t^3+t^2+t-1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nå er matrisen på trappeform. Fra det ser vi at rangen er tre så lenge polynomet

$$-t^3 + t^2 + t - 1$$

ikke er null, og to hvis dette polynomet er null. Tallet 1 er en rot, så $(t-1)$ er en faktor i polynomet. Polynomdivisjon gir da

$$-t^3 + t^2 + t - 1 = -(t-1)(t^2 - 1) = -(t+1)(t-1)^2.$$

Røttene i polynomet er derfor ± 1 . Dette gir:

$$t \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rang} = 3 \text{ og nullitet} = 0$$

$$t = \pm 1 \Rightarrow \text{rang} = 2 \text{ og nullitet} = 1$$

(Husk at nulliteten er antall kolonner minus rangen.)

(b) Ved å bytte om ligning to og tre ser vi at koeffisientmatrisen til ligningssystemet er den samme som i (a). Dvs. at ligningssystemet kan skrives på matriseform som

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor A er matrisen fra (a). Hvis $t \neq \pm 1$ vet vi at A har rang 3, og siden A er en 3×3 -matrise må den da være inverterbar. Da har systemet en løsning, nemlig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Da gjenstår de to tilfellene $t = \pm 1$. For $t = -1$ er systemet løsbart, mens for $t = 1$ er det ikke løsbart (sjekk selv). Konklusjon: systemet er løsbart for alle $t \neq 1$.

2012 ✓

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1(a). Radredusering gir at A er radekvivalent med trappematriksen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

men dette er bare én av mange muligheter. Det er to frie variabler:

$$x_3 = s$$

$$x_4 = t,$$

og da gir andre rad at

$$\begin{aligned} x_2 &= -3x_3 - x_4 \\ &= -3s - t, \end{aligned}$$

mens første rad gir

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 10x_3 - 4x_4 \\ &= -3(-3s - t) - 10s - 4t \\ &= -s - t. \end{aligned}$$

Nullrommet til matrisen A er derfor gitt som vektorrommet

$$\left\{ \begin{bmatrix} -s-t \\ -3s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

En basis for nullrommet blir da

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siden $\text{nullity}(A) = 2$ og matrisen har fire kolonner, gir dimensjonsteoremet at $\text{rank}(A) = 2$. Vi har et resultat som sier at $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$, og siden A^T også har fire kolonner gir dimensjonsteoremet for den matrisen at $\text{nullity}(A^T) = 2$. **Oppsummert: både rangen og nulliteten til A^T er 2.**

Oppgave 1(b). Trappematriksen i oppgave 1(a) har ledende koeffisienter i første og andre kolonne. Da har vi et resultat som sier at første og andre kolonnevektor i matrisen A danner en basis for kolonnerommet til A . **En basis for kolonnerommet til A blir da**

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Oppgave 5. Siden A er diagonaliserbar finnes det en inverterbar (kvadratisk) matrise P og en (kvadratisk) diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Antagelsen i oppgaven gir

$$PDP^{-1} = A = A^4 = PD^4P^{-1},$$

og ved å multiplisere med P^{-1} fra venstre og P fra høyre får vi likheten

$$D = D^4.$$

Men matrisen D er en diagonalmatrise, så ethvert element λ som står på diagonalen må tilfredsstille

$$\lambda = \lambda^4.$$

Dette medfører at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$, og for begge disse mulighetene gjelder $\lambda = \lambda^2$. **Men da gjelder også likheten $D = D^2$, som gir**

$$A = PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2.$$

2013 ✓

Oppgave 5 La λ være en egenverdi for A og la $x \neq 0$ være egenvektor tilhørende λ , dvs. $Ax = \lambda x$. Hvis vi ser på A^2x får vi at λ^2 er egenverdi tilhørende egenvektoren x

$$A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2x$$

Samtidig har vi at $A^2 = A$, dette gir at $A^2x = Ax$, som medfører at $\lambda^2x = \lambda x$. Vi får da at $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$. Da $x \neq 0$ må $\lambda^2 - \lambda = 0$ som gir at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$ er eneste mulighet.