Løsningsforslag MA1202/6202 Øving 8 (1)
V 2016

Kap 7

Oppg 2 a) Direkte regning gir

$$AA^T = I$$

b)

$$T(\vec{x}) = A\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\|T(\vec{x})\| = (1^2+4^2+3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{x}\| = (1^2+(-3)^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

Eksamen V 2006

Oppgave 1 Gitt vektoren **b** og de to radekvivalente matrisene A og B:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\\4\end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

a) Finn rang(A) og dimensjonen til nullrommet til A. Hva er dim($R(A)$), når $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\}$?

Siden matrisene A og B er radekvivalente, og B har to ledende enere, så har B to lineært uavhengige kolonner. Da har også A to lineært uavhengige kolonner, og rang(A)=2. Dimensjonen til kolonnerommet, dim(R(A)), er lik 2 siden rangen til A er 2. Dimensjonen til nullrommet finnes av dimensjonsteoremet: dim(R(A)) + dim(Null(A))=n, der n er antall kolonner i A. Da er dim(Null(A))=2-2=0. Så dimensjonen til nullrommet til A er 0.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A, $R(A)$, og en basis for nullrommet til A^T, Null(A^T).

Siden de to kolonnene i A er lineært uavhengige danner de en basis for kolonnerommet til A, så mengden

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

danner en basis for kolonnerommet til A. Nullrommet til A^T finnes ved å transponere A og finne nullrommet til denne:

$$A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Nullrommet er alle løsninger av $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siden A^T allerede er på trappeform, finnes løsningen ved å velge x_3 og x_4 som frie variable. Tilbakesubstitusjon gir da

$$\begin{aligned}
x_4 &= s\\
x_3 &= t\\
x_2 &= -3s - 2t\\
x_1 &= -s - t - (-3s - 2t) = 2s + t,
\end{aligned}$$

der $s, t \in \mathbf{R}$. På vektorform:

$$x = s\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Det gir at mengden

$$\left\{\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$$

danner en basis for nullrommet til A^T.

Gitt indreproduktrommet $\mathbf{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

c) Bruk minste kvadraters metode til å finne ligningen for den rette linja, $y = ax + b$, som passer best til datasettet gitt i Tabell 1. Finn projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Tabell 1: Datasett

A.

(Se eksempel 1 s. 471 i Anton/Rorres) Ved å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ finner vi koeffisientene til linja $y = ax + b$. Normalligningene er $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Setter opp totalmatrisen til normalligningssystemet og gausseliminerer:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 14 & 23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir at $x_2 = 1$ og $x_1 = 0.5(6 - 3x_2) = 3 - 1.5 = 1.5$. Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \end{bmatrix}^T$. Ligningen for den rette linja blir da $y = 1.5 + x$. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A er gitt av $A\mathbf{x}'$:

$$\mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

(Kommentar: I oppgaveteksten var det bare bedt om projeksjonen, men det enkleste her, og det som var tenkt spurt etter var den ortogonale projeksjonen. En annen riktig projeksjon på kolonnerommet vil gi lik uttelling.)

d) Vis at $\mathbf{b} - A\mathbf{x}' \in \mathrm{Null}(A^T)$, der $\mathbf{x}'$ er minste kvadraters løsning funnet i oppgave c).

Bruker resultatene fra c) og b):

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden vektoren $\mathbf{b} - A\mathbf{x}'$ kan skrives som en lineær-kombinasjon av basisen til $\mathrm{Null}(A^T)$ ligger den i $\mathrm{Null}(A^T)$.

e) Finn en ortogonal basis for $R(A)$, kall denne B. Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Null}(A^T)$, kall denne B'. Forklar (kort) hvorfor $B \cup B'$ danner en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$.

Ortogonaliserer $R(A)$ og Null(A^T) hver for seg. Bruker Gram-Schmidt (bruker koordinatvektorer for å spare plass) på basisen for kolonnerommet, vektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \quad W_1 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1), \quad \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 \\
&= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
&= (0,1,2,3) - \frac{(0,1,2,3)\cdot(1,1,1,1)}{4}(1,1,1,1) \\
&= (0,1,2,3) - 3/2(1,1,1,1) = (-3/2,-1/2,1/2,3/2)
\end{aligned}
$$

Bruker deretter Gram-Schmidt på basisen til Null(A^T), som vi kaller for $\mathbf{u}_3$ og $\mathbf{u}_4$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 = (1,-2,1,0), \quad W_3 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_3), \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{6} \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{u}_4 - \mathrm{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4 \\
&= \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 \\
&= (2,-3,0,1) - \frac{(2,-3,0,1)\cdot(1,-2,1,0)}{6}(1,-2,1,0) \\
&= (2,-3,0,1) - 4/3(1,-2,1,0) = (2/3,-1/3,-4/3,1).
\end{aligned}
$$

Teorem 6.2.6 (s.312) i Anton/Rorres gir at vektorene i R(A) og Null(A^T) står ortogonalt på hverandre. Da blir

$$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\} = \{(1,1,1,1),(-3/2,-1/2,1/2,3/2),(1,-2,1,0),(2/3,-1/3,-4/3,1)\}$$

en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$, med hensyn på det euklidske indreproduktet.

Eksamen 2009V

Oppgave 4 Her er det mest praktisk å bruke notasjonen $\sin(t)$ både for funksjonen sin og verdien til denne funksjonen i punktet t. Vi blander disse størrelsene notasjonsmessig. Så er det desto viktigere å huske når vi mener hva.

a) For å begrunne at vi har med et indreprodukt å gjøre, går vi gjennom aksiomene som reelle indreprodukt må tilfredstille:

Symmetri: For $f, g \in C[0,\pi]$ er

$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)f(t)dt = \langle g, f\rangle.$$

Følgelig er symmetriaksiomet oppfylt.

Additivitet: For $f_1, f_2, g \in C[0,\pi]$ er

$$\begin{aligned}\langle f_1 + f_2, g\rangle = \\ &\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f_1(t) + f_2(t))g(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1(t)g(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_2(t)g(t))dt \\ &=\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

Additivitetsaksiomet er altså oppfylt.

Linearitet: For $f, g \in C[0,\pi]$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\langle \alpha f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \alpha f(t)g(t)dt = \alpha\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt = \alpha\langle f, g\rangle.$$

Linearitetsaksiomet er altså oppfylt.

Positivitet: Hvis $f \in C[0,\pi]$, så er

$$\langle f, f\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)^2 dt$$

Dette er et intgral med en positiv kontinuerlig integrand f^2. Slike integral er er positive. Følgelig er $\langle f, f\rangle \geq 0$ for alle $f \in C[0,\pi]$. Videre er slike integral lik 0 hvis og bare hvis integranden er konstant lik 0.

Følgelig gjelder positivitetsaksiomet:

$$\langle f, f\rangle \geq 0 \quad \text{og} \quad \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Noen vil kanskje huske at positivitetsaksiomet kan uttrykkes på ulike måter. Faglærer synes utsagnet

$$\langle f, f\rangle > 0 \quad \text{når} \quad f \neq 0.$$

er det fyndigste. Det er ikke ekvivalent med det utsagnet som står i boka, men gir en ekvivalent mengde aksiomer.

b) Her er halve oppgaven å omformulere oppgaven til noe som vi kan håndtere.

La $W = Span\{\sin(t), \sin(3t)\}$, og $f \in C[0\pi]$ være funksjonen som er konstant lik 1. Villkårlige elementer i W kan skrives som $g(t) = a\sin(t) + b\sin(3t)$. Integralet i oppgaven kan skrives som

$$\frac{\pi}{2}||f - g||.$$

Oppgaven er nå som følger: Finn en $g \in W$ slik at $||f - g||$ er minimal. *Best approximation theorem* forteller oss at $g = \text{proj}_W f$ løser dette problemet. Siden $\{\sin(t), \sin(3t)\}$ er en ortonormal basis for W, kan vi bruke formelen

$$g = \text{proj}_W f = \langle f, \sin(t)\rangle \sin(t) + \langle f, \sin(3t)\rangle \sin(3t) = a\sin(t) + b\sin(3t)$$

til å finne g.

Nå er

$$\langle f, \sin\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)dt = \frac{4}{\pi}$$

$$\langle f, \sin(3t)\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(3t)dt = \frac{4}{3\pi}.$$

Dermed ser vi at verdiene $a = \frac{4}{\pi}$ og $b = \frac{4}{3\pi}$ minimerer det gitte integralet.

Faglærer hevder at dette er den eneste fornuftige måten å løse dette problemet på. Når vi kjenner det kraftulle *beste-tilnærming-teoremet*, er det unødvendig å kaste bort tiden på store klønete beregninger.

Til *skrekk og advarsel* følger en liste over tåpelige metoder:

I man kan bruke formler for fourierkoeffesienter. Men, da må man huske på å bruke et annet indreprodukt enn det vi er vant med fra læreboka. Her er det lett å surre. For å unngå dette: Abtraher problemet, og bruk projeksjoner, nøyaktig slik vi gjør i alle andre indreproduktrom.

En kunne også se på integralet som en deriverbar funksjon av a, b. Minimumspunktet vil da være et kritisk punkt, d.v.s et punkt der de partielle deriverte er lik 0.

Det finnes mange måter å utføre denne strategien, en kan gange ut integrasjonskjernen, integrere og så derivere. Dette vil i prinsippet føre fram.

Noe bedre vil det være å bruke indreproduktnotasjonen og de tilhørende regnereglene, og så minimere

$$\langle 1 - a\sin(t) - b\sin(3t), 1 - a\sin(t) - b\sin(3t)\rangle =$$
$$\langle 1, 1\rangle + a^2\langle \sin(t), \sin(t)\rangle + b^2\langle \sin(3t) + 2a\langle 1, \sin(t)\rangle + 2b\langle 1, \sin(3t)\rangle + 2ab\langle \sin(t), \sin(3t)\rangle,$$

der det siste leddet er lik 0, pga ortogonaliteten. I dette uttrykket kan vi sette inn verdiene av de ulike indreproduktene, og så finne de partiellderiverte.

En kan også derivere inne i integraltegnet:

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\pi (1 - a\sin(t) - b\sin(3t))^2 dt$$
$$= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}(1 - a\sin(t) - b\sin(3t))^2 dt$$
$$= \int_0^\pi 2(1 - a\sin(t) - b\sin(3t))\sin(t) dt$$

etc.

Det finnes sikkert enda flere måter å gjøre dette på, men nå er det vel nok.

Oppgave 7. Vi skal projisere $f(x) = e^x$ ned på det gitte rommet W. Projeksjonen er gitt ved

$$\text{proj}_W f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x,$$

hvor Fourierkoeffisientene er gitt ved

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 1, 2, 3) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Ved å kombinere de to integrallikhetene gitt i oppgaveteksten får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx &= \frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\cos nx + n \sin nx) \qquad (n = 1, 2, 3) \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx &= \frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\sin nx - n \cos nx) \qquad (n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

hvor vi har droppet de ubestemte konstantene. Da får vi

$$\begin{aligned} a_0 &= \left[\frac{1}{\pi}e^x\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \\ a_n &= \left[\frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\cos nx + n \sin nx)\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)} \qquad (n = 1, 2, 3) \\ b_n &= \left[\frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\sin nx - n \cos nx)\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{n(e^{2\pi}-1)}{\pi(n^2+1)} \qquad (n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Projeksjonen er derfor gitt ved

$$\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{3}{10}\sin 3x\right).$$

Eksamen Aug 2015

Oppg 2

a) Definisjon, se boka s 389

Eks. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Flere eks i boka.

b) A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^T = A$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{-1}$ ortogonal.

c) Anta A, B ortogonale, dvs $A^{-1} = A^T$ og $B^{-1} = B^T$. Da er

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

dvs AB er ortogonal.

d) $A^{-1} = A^T \Rightarrow I = AA^T$

$\Rightarrow \det(I) = \det(A) \cdot \det(A^T)$

$\Rightarrow 1 = \det(A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1$.