

Oppg 97

Med

MAT2046202 Spring 4  
2016

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ 3+2i & -2 & z \\ 7 & 1-5i & 6 \end{pmatrix} \quad \text{er}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3-2i & 7 \\ \bar{x} & -2 & 1+5i \\ \bar{y} & \bar{z} & 6 \end{pmatrix}$$

Så  $A = A^* \iff x = 3-2i$   
 $y = 7$   
 $z = 1+5i$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3-2i & 7 \\ 3+2i & -2 & 1+5i \\ 7 & 1-5i & 6 \end{pmatrix}$$

Oppg 104

$$AA^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så  $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

2009 VT

### Oppgave 5

- a) Vi kan sjekke at  $A^T A = AA^T$ , og av dette slutte at  $A$  er *normal*. Slike matriser er unitært diagonaliserbare. (Dette er et hovedpunkt i lærebokas kapittel 10.6.)
- b) Vi starter med å finne egenverdiene til  $A$  utifra den karakteristiske ligningen

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0.$$

Altså

$$(a - \lambda)^2 = -b^2, \quad \text{i.e.} \quad a - \lambda = \pm ib.$$

Dette gir oss egenverdiene  $\lambda_1 = a + ib$  og  $\lambda_2 = a - ib$ .

Nå finner vi egenvektorer:

Eigenvektorer tilhørende  $\lambda_1$ :

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss eigenvektoren  $\mathbf{x}_1 = [1 \ i]^T$ .

Eigenvektorer tilhørende  $\lambda_2$ :

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} ib & -b \\ b & ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss eigenvektoren  $\mathbf{x}_2 = [i \ 1]^T$ .

Nå har vi en ortogonal basis  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  for  $\mathbb{C}^2$ . Normerer vi denne, og bruker de resulterende vektorene som kolonner i en matrise  $U$ , får vi den unitære matrisen som diagonaliserer  $A$ . Det kan vi kontrollere ved å se at

$$U^H U = I \quad \text{og} \quad U^H A U = \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 6** Her gjøres rede for en kompleks utgave av denne oppgaven. Oversettelse til løsningsforslag for eksamensoppgaven: Substituer inn *ortogonal* for *unitær*, *T* for *H* og *symmetrisk* for *normal*.

*Denne oppgaven var ganske utfordrende, så ikke fortvil om du ikke kom i mål.*

- a) Unitær diagonalisbarhet er ekvivalent med normalitet (se kap 10.6). Det skal altså holde å sjekke at  $A^H A$  er normal<sup>1</sup>. Det gjør vi direkte ved

$$(A^H A)^H (A^H A) = (A^H A)(A^H A) = (A^H A)(A^H A)^H.$$

$A^H A$  er altså *normal*.

Hvordan kan vi lære noe om egenverdiene til  $A^H A$ ? Anta at  $A^H A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ . Bruker vi det euklidske indreproduktet på  $\mathbb{C}^n$ , får vi

$$\langle \mathbf{x}, A^H A \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H A^H A \mathbf{x} = \langle A \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle = \|A \mathbf{x}\|^2.$$

Men, vi har ennå ikke brukt at  $\mathbf{x}$  er en eigenvektor. Det må vi utnytte nå:

$$\langle \mathbf{x}, A^H A \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \|\mathbf{x}\|^2.$$

---

<sup>1</sup>Her kan en også rett og slett slå fast at  $A^H A$  er hermitesk, og at hermiteske matriser er unitært diagonalisbare (fordi de er normale) med reelle egenverdier (fordi de er hermiteske).

Dermed må

$$\lambda = \frac{\|A\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

et reelt tall større enn eller lik 0.

Alle egenverdiene til  $A^H A$  er altså reelle tall større enn eller lik 0.

- b)  $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$  impliserer at  $A\mathbf{x} = 0$ . Men, dette impliserer igjen at  $A^H A\mathbf{x} = 0$ , og dermed at  $\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$

$\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$  impliserer at  $A^H A\mathbf{x} = 0$ . I så fall er  $\mathbf{x}^H (A^H A\mathbf{x}) = 0$ , og følgelig må  $(A\mathbf{x})^H (A\mathbf{x}) = 0$ , noe som impliserer at  $A\mathbf{x} = 0$ , altså  $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$ .

Vi har nå sett at  $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$  hvis og bare hvis  $\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$ . Disse rommene er altså identiske.

*Alternativ:* Husk at  $\text{Null}(A^H) = \text{Row}(A^H)^\perp = \text{Col}(A)^\perp$ . Dermed er  $A^H A\mathbf{x} = 0$  hvis og bare hvis  $A\mathbf{x} \in \text{Col}(A)^\perp$ . Men,  $A\mathbf{x} \in \text{Col}(A)$ , så dette er ekvivalent<sup>2</sup> med at  $A\mathbf{x} = 0$ . Vi har nå sett at

$$A^H A\mathbf{x} = 0 \quad \text{hvis og bare hvis} \quad A\mathbf{x} = 0.$$

Dette er ekvivalent med at  $\text{Null}(A^H A) = \text{Null}(A)$ .

At matrisene har samme rang følger direkte av dimensjonsteoremet. Husk at  $A^H A$  og  $A$  har like mange kollonner.

- c)  $A$  og  $A^H A$  har begge  $n$  kolonner. Dimensjonsteoremet sier i denne situasjonen at

$$\text{nullitet}(A) + \text{rang}(A) = \text{nullitet}(A^H A) + \text{rang}(A^H A). \quad (4)$$

I forrige oppgave så vi at  $A$  og  $A^H A$  har samme nullrom. De har altså samme nullitet. Av dette og (4) følger det at  $A$  og  $A^H A$  har samme rang. Vi behøver altså bare å vise at  $r = \text{rang}(A^H A)$ .

*Hvis vi er familiære med similaritetsinvarianter*, kan vi argumentere på følgende måte:  $A^H A$  er similær med en diagonalmatrise med egenverdiene til  $A^H A$  langs diagonalen. Denne diagonalmatrisen har rang  $r =$  (antallet egenverdier for  $A^H A$  som er forskjellige fra 0). Nå er rangen en similaritetsinvariant. Følgelig er  $\text{rang}(A^H A) = r$

*Hvis en ikke er familiær med similaritetsinvarianter*, kan en argumentere på følgende måte: Fra diagonalisering av en normal matrise  $B$  kan vi skaffe oss en unitær matrise  $U$  og en diagonal matrise  $D$  slik at  $U^H B U = D$ . Dette kan vi skrive som  $B U = U D$ .

Rangen til  $B$  er lik rangen til  $B U$ , siden  $\text{Col}(B) = \text{Col}(B U)$ . (Hvorfor er det slik? Anta at  $w \in \text{Col}(B)$ . Da finnes en vektor  $v$  slik at  $w = B v$ . La nå  $v' = U^H v$ . Da

---

<sup>2</sup>Det finnes bare en vektor som ligger både i  $W$  og  $W^\perp$ ; nullvektoren.

er  $w = Bu = BUU^h v = BUv'$ . Altså er  $w \in \text{Col}(BU)$ . Altså er  $\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(BU)$ . Tilsvarende ser man at  $\text{Col}(BU) \subseteq \text{Col}(B)$ .

Rangen til  $D$  er lik rangen til  $UD$ , siden  $\text{Row}(D) = \text{Row}(UD)$ . (Hvorfor?  $\text{Row}(D) = \text{Col}(D^T) = \text{Col}(D^T U^T) \text{Row}(UD)$ , siden vi kan bruke argumentet over på matrisene  $D^T$  og  $U^T$  istedenfor  $B$  og  $U$ ).

Siden  $BU = UD$  viser dette at rangen til  $B$  er lik rangen til  $D$  i en slik diagonalisering.

Nå gjenstår det bare å anvende dette på vårt konkret tilfelle, der  $D$  er en diagonalmatrise med  $r$  elementer som er forskjellige fra 0. En slik matrise har rang  $r$ . Følgelig er

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^H A) = \text{rang}(D) = r = \text{antall egenverdier i } A^H A \text{ som er forskjellige fra 0}.$$

*Hvis en vil gjøre dette på en tredje måte – kanskje den beste (?)* – kan en observere at egenverdien  $\lambda = 0$  må ha geometrisk multiplisitet  $n - r$ : Vi kan nemlig finne  $n$  lineært uavhengige egenvektorer for  $A^H A$ , der de  $r$  første tilhører egenverdier som er forskjellige fra 0; de  $n - r$  siste egenvektorene tilhører da egenverdien 0. Egenrommet tilhørende  $\lambda = 0$  har altså dimensjon  $n - r$ .

Nå er  $\text{Null}(A^H A)$  identisk med egenrommet tilhørende  $\lambda = 0$ . Dermed er  $\text{Null}(A^H A)$   $n - r$ -dimensjonalt, og dimensjonsteoremet, samt oppgave b) gir da

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^H A) = r.$$

Hvilket skulle vises.

2010 V

**Opgave 3.** En matrise  $M$  er hermitisk dersom  $M^* = M$ . Reglene for å konjugert-transponere et produkt, trekke ut skalarer, at  $I^* = I$  og at  $I$  kommunutterer med alle matriser, gir

$$\begin{aligned} (DA)^* &= A^* D^* \\ &= A^* ([3 - 3i]I)^* \\ &= (-i)A(\overline{3 - 3i})I \\ &= (-i)(3 + 3i)AI \\ &= (3 - 3i)AI \\ &= (3 - 3i)IA \\ &= DA, \end{aligned}$$

så  $DA$  er hermitisk. Alle hermitiske matriser er normale (en matrise  $M$  er normal dersom  $MM^* = M^*M$ ), og et av resultatene sier at en normal matrise er unitært diagonalisbar. Derfor er  $DA$  unitært diagonalisbar.

**Problem 3**

This problem involves *orthogonal diagonalization* of a matrix. Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Explain why the matrix  $A$  must be orthogonally diagonalizable.

*Solution.* The matrix  $A$  is *symmetric*, hence it is orthogonally diagonalizable.  $\square$

- b) Find the eigenvalues of  $A$  and bases for the corresponding eigenspaces.

*Solution.* We first compute the characteristic polynomial of  $A$ :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{\lambda - 2} & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 2)((\lambda - 3)^2 - 1) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

The *eigenvalues* of  $A$  are the solutions to  $p_A(\lambda) = 0$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \text{ (with algebraic multiplicity 2),} \\ \lambda &= 4 \text{ (with algebraic multiplicity 1).} \end{aligned}$$

We now compute a basis for the *eigenspace* corresponding to each eigenvalue. These eigenspaces are the *null spaces* of  $\lambda I - A$ .

For  $\boxed{\lambda = 2}$  we get  $\lambda I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . The corresponding system is

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

leading to just

$$-x_1 - x_3 = 0,$$

as the 2nd equation is  $0 = 0$  and the 3rd is the same as the first.

The general solution to the system is then

$$x_1 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t \quad \text{for any } t, s.$$

Choose first  $t = 1, s = 0$  and then  $t = 0, s = 1$ .

Therefore, a basis for the eigenspace corresponding to  $\lambda = 2$  is  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , where

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For  $\boxed{\lambda = 4}$  we get  $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . The corresponding system is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

leading to

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3 \\ 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3. \end{cases}$$

The general solution to the system is then

$$x_1 = t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = t \quad \text{for any } t.$$

Take  $t = 1$ . A basis for the eigenspace corresponding to  $\lambda = 4$  is then  $\{\mathbf{u}_3\}$ , where

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

c) Find an *orthonormal* basis for each eigenspace of  $A$ .

*Solution.* The vectors  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$  are already orthogonal:  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ . We only need to normalize them to have norm 1.

We have:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{u}_2\| = 1,$$

so for the eigenspace corresponding to  $\lambda = 2$ , we obtain the *orthonormal* basis  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , where

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Now we normalize the vector  $\mathbf{u}_3$ . We have  $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , so for the eigenspace corresponding to  $\lambda = 4$ , we obtain the *orthonormal* basis  $\{\mathbf{v}_3\}$ , where

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

d) Find matrices  $P$  and  $D$  such that  $P^T A P = D$ .

*Solution.* We have

$$P = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

□