Løsningsforslag til eksamen i MA1202/MA6202 *Lineær algebra med anvendelser* høsten 2009.

Oppgave 1

a) Rangen til A er lik antallet pivotkolonner i trappeformen R. Følgelig har A rang $\underline{\underline{3}}$. Nulliteteten til A er ved dimensjonsteoremet lik differansen mellom antallet kolonner og rangen, altså $\underline{\underline{5-3=2}}$.

Her kan en også bruke definisjonene direkte; finne basiser for radrom og nullrom, og bestemme rang og nullitet utifra disse.

b) Nullrommet til A er identisk med nullrommet til R, siden disse matrisene er radekvivalente. Vi går derfor løs på oppgaven å finne nullrommet til R.

For å beskrive nullrommet til R må vi se på ligningen $R\mathbf{x} = 0$, der $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$. Den generelle løsningen avhenger av to frie variabler, s, t, og vi setter

$$x_3 = s \quad x_5 = t.$$

Den første raden i R gir ligningen

$$x_1 + x_3 - x_5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_1 = t - s.$$

Den andre raden i R gir

$$x_2 + x_3 - x_5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_2 = t - s.$$

Den tredje raden i R gir

$$x_4 + 2x_5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_4 = -2t.$$

(Den fjerde raden i R gir $0 = 0$.)

Dermed kan vi skrive den generelle løsningen av $R\mathbf{x} = 0$ som

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Dermed er

$$\underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}^T\right\}}} \tag{1}$$

en basis for $\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(R)$

Kolonnevektorene i A som svarer til pivotkolonnene i R utgjør en basis for $\mathrm{Col}(A)$. Dermed kan vi slå fast at

$$\underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}}} \tag{2}$$

en basis for $\mathrm{Col}(A)$

c) Nå er $R(T_A) = \mathrm{Col}(A)$. Vi skal altså finne en ortonormal basis for kolonnerommet til A.

Vi bruker her Gram-Schmidt-fremgangsmåten, og tar utgangspunkt i vektorene $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 2)$ og $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$, som utgjør en basis for kolonnerommet til A:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - (-1)\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_3 - \frac{2}{4}\mathbf{v}_2 - \frac{0}{4}\mathbf{v}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Vi ser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ har lengde 2 mens $\mathbf{v}_3$ har lengde 1. Vi normaliserer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Dermed skal vektorene

$$\underline{\underline{(1/2, -1/2, 1/2, -1/2), \quad (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), \quad (-1/2, 1/2, 1/2, -1/2).}}$$

utgjøre en ortonormal basis for bildet til T_A.

Oppgave 2

a) A er symmetrisk, og dermed ortogonalt diagonaliserbar.

Se på det karakteristiske polynomet til A:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (1 - \lambda)^2(4 - \lambda).$$

Dermed ser vi at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A med algebraisk multiplisitet 2 og at $\lambda = 4$ en egenverdi med algebraisk multiplisitet 1.

Det krever litt arbeid å finne denne faktoriseringen av det karakteristiske polynomet, men skal være mulitg å gjennomføre, særlig hvis man er litt oppmerksom mens man regner ut det karakteristiske polynomet.

Hvis en ikke umiddelbart kommer opp med en slik faktorisering, kan man dividere det karakteristiske polynomet med $(1-\lambda)(4-\lambda)$ for å finne den siste faktoren. Vi vet at $(1-\lambda)(4-\lambda)$ er en faktor i det karakteristiske polynomet, siden 1 og 4 er røtter. Dersom du får til en slik faktorisering, viser dette også at $\lambda = 1, 4$ er egenverdier

For de som ikke liker å herje med polynomer finnes en fremgangsmåte som bygger på at *geometrisk multiplisitet* = *algebraisk multiplisitet* for diagonaliserbare matriser. Dermed kan vi finne multiplisiteten til egenverdien λ ved å studere rangen til matrisen $A - \lambda I$. Vi får formelen

$$\text{multiplisitet}(\lambda) = \text{nullitet}(A - \lambda I).$$

En siste mulighet er å bruke informasjonen om at matrisen Q diagonaliserer A. Dermed kan man lett finne basiser for de ulike egenrommene, og på den måten finne de geometriske multiplisitetene.

b) La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ være kolonnene i Q. Disse er egenvektorer tilhørende egenverdiene $1, 1, 4$.

Den generelle løsningen av differensialligningen kan skrives som

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^t \mathbf{v}_1 + C_2 e^t \mathbf{v}_2 + C_3 e^{4t} \mathbf{v}_3.$$

(Se kapittelet om differensialligninger for detaljene.) Dette medfører at

$$\mathbf{y}(0) = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 + C_3 \mathbf{v}_3$$

Initialbetingesen gir oss ligningen

$$C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 + C_3 \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

som har løsningen $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = \sqrt{3}$. Løsningen er altså

$$\underline{\underline{\mathbf{y}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

c) Vi kan skrive ligningen vår som

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{k}^T \mathbf{x} + 1 = 0,$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Innfører vi variablene $\mathbf{y} = (x', y', z')$ definert ved $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, der Q er den diagonaliserende matrisen beskrevet over, får vi

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(Q^T AQ)\mathbf{y} \quad \text{og} \quad \mathbf{k}^T\mathbf{x} = (Q^T\mathbf{k})^T\mathbf{y}.$$

$Q^T AQ$ er diagonalmatrisen med diagonalelementer $1, 1, 4$. $\mathbf{k}$ er lik $4\mathbf{v}_3$, så $Q^T\mathbf{k} = (0, 0, 4)$. I x', y', z'-variabler får vi ligningen

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} + 2(z')^2 - 4z' + 1 = 0.$$

For å få full oversikt er vi nødt til å fullføre z'-kvadratet. Vi ser at

$$\begin{aligned} 2(z')^2 - 4z' &= 2((z')^2 - 2z' \\ &= 2((z' - 1)^2 - 1) \\ &= 2(z' - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Setter vi dette inn ligningen, får vi

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} + \frac{(z' - 1)^{2\,\prime}}{1/2} = 1.$$

Dette er ligningen for en ellipsoide med sentrum i $x' = y' = 0$, $z' = 1$. For å bestemme dette punktet i x, y, z-koordinater, bruker vi koordinatskiftematrisen Q på følgende måte:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x} = Q\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Sentrum i ellipsoiden er altså i punktet $\underline{\underline{(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})}}$.

Oppgave 3

a) Første kolonne i A:

$$[T(1)]_{\mathcal{S}} = [1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andre kolonne i A:

$$[T(x)]_{\mathcal{S}} = [2x - 1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne i A:

$$[T(x^2)]_{\mathcal{S}} = [(2x-1)^2]_{\mathcal{S}} = [4x^2 - 4x + 1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er

$$\underline{\underline{A = [T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = [[T(1)]_{\mathcal{S}}|[T(x)]_{\mathcal{S}}|[T(x^2)]_{\mathcal{S}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.}}$$

b) Siden A er triangulær, kan vi lese egenverdiene direkte av diagonalen. De er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. *Finner egenvektor tilhørende $\lambda_1 = 1$:*

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_1.

Finner egenvektor tilhørende $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_2.

Finner egenvektor tilhørende λ_3:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_3.

Dermed er

$$\underline{\underline{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}}} \tag{3}$$

en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

c) Her skal vi dra nytte av kunnskap om forholdet mellom egenskaper til vektorer og deres kooridnatvektorer.

En vektor v er en egenvektor for en lineæroperator T hvis og bare hvis koordinatvektoren til v $[v]_{\mathcal{B}}$ uttrykt i en basis $\mathcal{B}$ er en egenvektor for matrisen $[T]_{\mathcal{BB}}$ til operatoren. Vektoren v og koordinatvektoren $[v]_{\mathcal{B}}$ tilhører i så fall samme egenverdi for henholdsvis T og $[T]_{\mathcal{BB}}$. (Vi har altså 1-1-korrespondanser mellom egenrommene til T og egenrommene til A tilhørende samme egenverdi.)

Punkt (3) gir oss egenvektorene for matrisen $[T]_{\mathcal{SS}}$. De korresponderende vektorene i P_2 er da egenvektorer for T. Vi finner disse på følgende måte:

Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_1(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1,$$

$\mathbf{x}_2 = (-1, 1, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_2(x) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x - 1$$

og $\mathbf{x}_3$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_3(x) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Dette gir oss en basis

$$\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$

for P_2 bestående av egenvektorer for T.

La oss nå finne matrisen til T i denne basisen. Vi utnytter at denne basisen består av egenvektorer.

Første kolonne:

$$[T(p_1(x))]_{\mathcal{B}} = [1 \cdot p_1(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andre kolonne:

$$[T(p_2(x))]_{\mathcal{B}} = [2 \cdot p_2(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne:

$$[T(p_3(x))]_{\mathcal{B}} = [4 \cdot p_3(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{BB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

En kan eventuelt begrunne dette svaret med at $\mathcal{B}$ er en basis for P_2 bestående av egenvektorer for T. I den situasjonen er $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ alltid en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen.

Oppgave 4

a) For å begrunne at dette er et indreprodukt, går vi gjennom kravene i definisjonen:

Symmetri: For $A, B \in M_{n\times n}$ er

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}((A^T B)^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \langle B, A\rangle.$$

Følgelig er symmetriaksiomet oppfylt.

Additivitet: For $A_1, A_2, B \in M_{n\times n}$ er

$$\begin{aligned}\langle A_1 + A_2, B\rangle =& \mathrm{tr}((A_1 + A_2)^T B)\\ =& \mathrm{tr}(A_1^T B + A_2^T B)\\ =& \mathrm{tr}(A_1^T B) + \mathrm{tr}(A_2^T B)\\ =& \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle.\end{aligned}$$

Additivitetsaksiomet er altså oppfylt.

Linearitet: For $A, B \in M_{n\times n}$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\langle \alpha A, B\rangle = \mathrm{tr}((\alpha A)^T B) = \mathrm{tr}(\alpha(A^T B)) = \alpha\mathrm{tr}(A^T B) = \alpha\langle A, B\rangle.$$

Linearitetsaksiomet er altså oppfylt.

Positivitet: Hvis $A \in M_{n\times n}$, så er

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot v_i,$$

der v_i er kolonne i i A og $-\cdot-$ er det vanlige euklidske skalarproduktet. Vi vet at $v_i \cdot v_i \geq 0$. Vi har altså en sum av positive element. Følgelig er $\langle A, A\rangle$ alltid positiv positiv. Hvis denne summen er lik 0 betyr det at hvert enkelt ledd $v_i \cdot v_i = 0$, hvilket medfører at $v_i = 0$, hvilket medfører at $A = 0$.

$$\langle A, A\rangle \geq 0 \quad \text{og} \quad \langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Noen vil kanskje huske at positivitetsaksiomet kan uttrykkes på ulike måter. Faglærer synes utsagnet

$$\langle A, A\rangle > 0 \quad \text{når} \quad A \neq 0.$$

er det fyndigste. Det er ikke ekvivalent med det utsagnet som står i boka, men gir ekvivalente aksiomer. Jfr. diskusjon av logisk avhengighet.

b) Vi skal først vise at S_n er et underrom av M_n.

At S_n er en delmengde er så opplagt at vi nesten ikke behøver å nevne det.

S_n er ikke tom, siden det finnes symmetriske $n \times n$-matriser. Et eksempel på dette er identitetsmatrisen I. Et annet eksempel er nullmatrisen 0.

Da gjenstår det å vise at S_n er lukket under vektorromsoperasjonene. Anta at $A, B \in S_n$ og at $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da er

$$(\alpha A + \beta B)^T = (\alpha A)^T + (\beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B.$$

Følgelig er $\alpha A + \beta B \in S_n$ når $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $A, B \in S_n$.

Her kan en selvfølgelig velge å vise at S_n er lukket under skalarmultiplikasjon og addisjon hver for seg.

I alle fall har vi nå vist at $S_n \subset M_n$ er et underrom.

Matrisene A_1, A_2, A_3 er symmetriske, så de ligger opplagt i S_2.

En villkårlig symmetrisk matrise er en lineærkombinasjon av disse tre, siden

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = aA_1 + cA_2 + \sqrt{2}bA_3.$$

Følgelig er $S_2 = \text{Span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

Vi har ennå ikke vist at $\{A_1, A_2, A_3\}$ er lineært uavhengig, men det følger automatisk dersom vi er i stand til å vise at denne mengden er ortonormal; siden ortonormale mengder er lineært uavhengige.

Vi sjekker at mengden vår er ortonormal:

$$\begin{aligned}
\langle A_1, A_1 \rangle &= \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = 1, \\
&\vdots \\
\langle A_1, A_3 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Disse og tilsvarende beregninger viser at mengden $\{A_1, A_2, A_3\}$ er ortonormal. Siden denne mengden spenner ut S_2, vet vi at det må være en *ortonormal basis* for dette rommet.

c) *Løsning etter boka:* Vi skal beregne $\text{proj}_{S_2} A$. Dette gjør vi ganske enkelt ved å bruke formelen

$$\underline{\underline{\text{proj}_{S_2} A}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle A, A_i \rangle}{\langle A_i, a_i \rangle} A_i = \frac{1}{1} A_1 + \frac{1}{1} A_2 + \frac{3/\sqrt{2}}{1} A_3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

Løsning som krever litt fantasi/flaks, men mindre regning: Vi er heldige, og ser at

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

spenner ut $S_2^{\perp}$. Dermed er[1]

$$\text{proj}_{S_2} A = A - \text{proj}_{S_2^{\perp}} A = A - \frac{\langle A, A_4 \rangle}{\langle A_4, A_4 \rangle} A_4 = A - \frac{-1}{2} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5

a) A er hermitesk hvis og bare hvis $A^H = A$.

Dersom A er unitært diagonaliserbar, finnes en matrise U og en diagonalmatrise D slik at

$$A = UDU^H,$$

og der D har egenverdiene til A langs diagonalen. Dersom A bare har reelle egenverdier, er altså D en reell diagonalmatrise. Slike matriser er hermiteske. Følgelig er

$$A^H = (UDU^H)^H = (U^H)^H D^H U^H = UDU^H = A$$

Dette viser at A er hermitesk.

b) At A er *skjev-hermitesk* betyr at $A^H = -A$. Hvis nå λ er en egenverdi for A, og $\mathbf{x}$ er en tilhørende egenvektor, så er

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H A^H A\mathbf{x} = \mathbf{x}^H (-A) A\mathbf{x} = -\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Følgelig er

$$\lambda^2 = -\frac{\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Høyresiden her er et negativt reelt tall, følglig må λ være et reelt multippel av i, og har altså realdel 0.

[1]Siden $\text{proj}_W + \text{proj} W^{\perp} = Id_V$ for underrom W av indreproduktrom V.