Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Truls Fretland (73 55 89 87)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

LØSNINGSFORSLAG
Bokmål
Tirsdag 23. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 13. juni 2006

Hjelpemidler:
Rottman formelsamling. Enkel kalkulator (HP30S)

Oppgave 1 Gitt vektoren $\mathbf{b}$ og de to radekvivalente matrisene A og B:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn rang(A) og dimensjonen til nullrommet til A. Hva er $\dim(R(A))$, når $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\}$?

Siden matrisene A og B er radekvivalente, og B har to ledende enere, så har B to lineært uavhengige kolonner. Da har også A to lineært uavhengige kolonner, og rang(A)=2. Dimensjonen til kolonnerommet, dim(R(A)), er lik 2 siden rangen til A er 2. Dimensjonen til nullrommet finnes av dimensjonsteoremet: dim(R(A)) + dim(Null(A))=n, der n er antall kolonner i A. Da er dim(Null(A))=2-2=0. Så dimensjonen til nullrommet til A er 0.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A, $R(A)$, og en basis for nullrommet til A^T, Null(A^T).

Siden de to kolonnene i A er lineært uavhengige danner de en basis for kolonnerommet til A, så mengden

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

danner en basis for kolonnerommet til A. Nullrommet til A^T finnes ved å transponere A og finne nullrommet til denne:

$$A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Nullrommet er alle løsninger av $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siden A^T allerede er på trappeform, finnes løsningen ved å velge x_3 og x_4 som frie variable. Tilbakesubstitusjon gir da

$$\begin{aligned} x_4 &= s\\ x_3 &= t\\ x_2 &= -3s - 2t\\ x_1 &= -s - t - (-3s - 2t) = 2s + t, \end{aligned}$$

der $s, t \in \mathbf{R}$. På vektorform:

$$x = s\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Det gir at mengden

$$\{\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\}$$

danner en basis for nullrommet til A^T.

Gitt indreproduktrommet $\mathbf{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

c) Bruk minste kvadraters metode til å finne ligningen for den rette linja, $y = ax + b$, som passer best til datasettet gitt i Tabell 1. Finn projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Tabell 1: Datasett

A.

(Se eksempel 1 s. 471 i Anton/Rorres) Ved å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ finner vi koeffisientene til linja $y = ax + b$. Normalligningene er $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Setter opp totalmatrisen til normalligningssystemet og gausseliminerer:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 14 & 23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir at $x_2 = 1$ og $x_1 = 0.5(6 - 3x_2) = 3 - 1.5 = 1.5$. Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \end{bmatrix}^T$. Ligningen for den rette linja blir da $y = 1.5 + x$. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A er gitt av $A\mathbf{x}'$:

$$\mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

(Kommentar: I oppgaveteksten var det bare bedt om projeksjonen, men det enkleste her, og det som var tenkt spurt etter var den ortogonale projeksjonen. En annen riktig projeksjon på kolonnerommet vil gi lik uttelling.)

d) Vis at $\mathbf{b} - A\mathbf{x}' \in \mathrm{Null}(A^T)$, der $\mathbf{x}'$ er minste kvadraters løsning funnet i oppgave c).

Bruker resultatene fra c) og b):

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden vektoren $\mathbf{b} - A\mathbf{x}'$ kan skrives som en lineær-kombinasjon av basisen til $\mathrm{Null}(A^T)$ ligger den i $\mathrm{Null}(A^T)$.

e) Finn en ortogonal basis for $R(A)$, kall denne B. Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Null}(A^T)$, kall denne B'. Forklar (kort) hvorfor $B \cup B'$ danner en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$.

Ortogonaliserer $R(A)$ og Null(A^T) hver for seg. Bruker Gram-Schmidt (bruker koordinatvektorer for å spare plass) på basisen for kolonnerommet, vektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \quad W_1 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1), \quad \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 \\
&= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
&= (0,1,2,3) - \frac{(0,1,2,3)\cdot(1,1,1,1)}{4}(1,1,1,1) \\
&= (0,1,2,3) - 3/2(1,1,1,1) = (-3/2,-1/2,1/2,3/2)
\end{aligned}$$

Bruker deretter Gram-Schmidt på basisen til Null(A^T), som vi kaller for $\mathbf{u}_3$ og $\mathbf{u}_4$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 = (1,-2,1,0), \quad W_3 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_3), \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{6} \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{u}_4 - \mathrm{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4 \\
&= \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 \\
&= (2,-3,0,1) - \frac{(2,-3,0,1)\cdot(1,-2,1,0)}{6}(1,-2,1,0) \\
&= (2,-3,0,1) - 4/3(1,-2,1,0) = (2/3,-1/3,-4/3,1).
\end{aligned}$$

Teorem 6.2.6 (s.312) i Anton/Rorres gir at vektorene i R(A) og Null(A^T) står ortogonalt på hverandre. Da blir

$$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\} = \{(1,1,1,1),(-3/2,-1/2,1/2,3/2),(1,-2,1,0),(2/3,-1/3,-4/3,1)\}$$

en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$, med hensyn på det euklidske indreproduktet.

Oppgave 2 Matrisen M gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

har to distinkte egenverdier.

a) Finn egenverdiene og en basis for de to egenrommene E_1 og E_2 til M.

Finner egenverdiene ved å bestemme hvilke λ som gjør at matrisen $(\lambda I - A)$ er singulær:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & \lambda - 4/5 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)((\lambda - 4/5)^2 - 1/25) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 8/5\lambda + 3/5) = 0.$$

Denne har løsningene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 0.6$. Egenverdien λ_1 innsatt i egenverdiligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ gir etter gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ved å sette $x_1 = s$ og $x_3 = t$, der $s, t \in \mathbf{R}$ og ikke begge lik null, fåes $x_2 = t$. Egenvektorene er dermed gitt av

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenverdien $\lambda_3 = 0.6$ innsatt i egenverdiligningen gir etter gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrommene er:

$$E_1 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$$
$$E_2 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\}$$

b) Finn en matrise P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen D, slik at $P^{-1}MP = D$.

Matrisen P består av egenvektorene til M og D er en diagonalmatrise med de tilhørende egenverdiene langs diagonalen.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Som kontroll kan man sjekke at faktisk $P^{-1}MP = D$.

c) En kantine serverer kjøtt-, fiske- og vegetar-måltider til 100 faste middagsgjester. Kokken er en noe spesiell hobbymatematiker og ønsker å forutsi hvordan middagsgjestene fordeler seg på de ulike rettene. Kokken har observert følgende: De som spiser vegetar spiser vegetar neste dag. Av de som spiser kjøtt spiser 80% kjøtt neste dag og 20% fisk neste dag. Av de som spiser fisk spiser 80% fisk neste dag og 20% kjøtt neste dag. Hvis det en gitt dag er 10 personer som spiser vegetar, 80 som spiser kjøtt og 10 som spiser fisk, hvordan fordeler disse seg da etter 5 dager?

Valg av middag kan betraktes som en markov-prosess med 3 ulike tilstander. Tilstand 1 er å spise vegetarmiddag, tilstand 2 å spise kjøttmiddag og tilstand 3 å spise fiskemiddag. Fra de oppgitte data ser vi at resultatet fra oppgave b) kan brukes. Gitt fordelingen en dag $\mathbf{x}_n$, så vil fordelingen neste dag, $\mathbf{x}_{n+1}$, være gitt av

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n,$$

der $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^3$ og M er overgangsmatrisen fra oppgave b). Etter 5 dager vil da fordelingen være gitt ved

$$\mathbf{x}_5 = M^5\mathbf{x}_0, \tag{1}$$

der $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}10 & 80 & 10\end{bmatrix}^T$. I oppgave b) fant vi ut at M kunne diagonaliseres slik at $M = PDP^{-1}$. Innsatt i ligning (1) fåes

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_5 &= (PDP^{-1})^5\mathbf{x}_0 = PD^5P^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.6\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.6^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5389 & 0.4611\\ 0 & 0.4611 & 0.5389\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 47.7\\ 42.3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Etter 5 dager gir modellen at middagsgjestene er fordelt slik: 10 vegetar, 48 kjøtt og 42 fisk.

Oppgave 3 La P_2 være vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 2. La $V = \{p(x) \mid p(x) = a - ax + bx^2 \in P_2, a, b \in \mathbf{R}\}$ være et vektorrom.

a) Vis at V er et underrom av P_2.

Representerer vektorene i V som koordinatvektorer med hensyn på standardbasisen $\{1, x, x^2\}$: $\mathbf{v}_1 = (a_1, -a_1, b_1)$ og $\mathbf{v}_2 = (a_2, -a_2, b_2)$, der $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P_2$, slik at V er en delmengde av P_2. For at V skal være et underrom av P_2 må det være lukket under addisjon;

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (a_1, -a_1, b_1) + (a_2, -a_2, b_2) = (a_1 + a_2, -a_1 - a_2, b_1 + b_2) = (a, -a, b) \in V,$$

og skalarmultiplikasjon;

$$k\mathbf{v}_1 = k(a_1, -a_1, b_1) = (ka_1, -ka_1, kb_1) = (a, -a, b) \in V,$$

så V er et underrom av P_2.

La $T : V \to W$ være en transformasjon definert ved

$$T(p) = (1 + x)p(x),$$

der W er et underrom av P_3.

b) Vis at T er en lineær transformasjon. Finn billedmengden til T, $R(T)$.

Transformasjonen $T : V \to W$ er lineær hvis og bare hvis følgende to krav er oppfylt:

1. $T(p + q) = T(p) + T(q)$
2. $T(kp) = kT(p)$,

der $p, q \in V$ og $k \in \mathbf{R}$. Sjekker krav 1:

$$\begin{aligned} T(p + q) &= (1 + x)(p(x) + q(x)) = (1 + x)p(x) + (1 + x)q(x) \\ &= T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Krav 2:

$$T(kp) = (1 + x)(kp)(x) = k(1 + x)p(x) = kT(p)$$

Siden begge kravene er oppfylt er T en lineær transformasjon.
La $p(x) = a - ax + bx^2 \in V$. Da er

$$\begin{aligned} T(p) &= T(a - ax + bx^2) = (1 + x)(a - ax + bx^2) \\ &= (a - ax + bx^2) + (ax - ax^2 + bx^3) \\ &= a + (b - a)x^2 + bx^3 \end{aligned}$$

Fra utregningen av $T(p)$ ser vi at billedmengden til T er mengden av alle polynom på formen $a + (b - a)x^2 + bx^3$, der $a, b \in \mathbf{R}$.

Betrakt nå indreproduktrommene V og W, med indreprodukt definert ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx. \tag{2}$$

c) Gitt basisen $B = \{(1-x), x^2\}$ for V og basisen $B' = \{1-x^2, -1+5x^2+4x^3\}$ for W. Vis at mengden B' er ortogonal med hensyn på indreproduktet gitt av (2). Finn matrisen til T, $[T]_{B',B}$, og bruk denne til å regne ut $T(-1+x-4x^2)$.

Mengden B' er ortogonal hvis indreproduktet mellom de to vektorene i mengden er lik null.

$$\begin{aligned}\langle 1-x^2, -1+5x^2+4x^3\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(-1+5x^2+4x^3)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} -1+5x^2+4x^3+x^2-5x^4-4x^5\mathrm{d}x \\ &= [-x+2x^3+x^4-x^5-4/6x^6]_{-1}^{1} \\ &= [-x+2x^3-x^5]_{-1}^{1} = (-1+2-1)-(1-2+1) = 0.\end{aligned}$$

Dermed er B' ortogonal med det gitte indreproduktet.
For å finne matrisen må vi transformere hver av basisvektorene i basisen B og deretter uttrykke de som koordinatvektorer mhp. basisen B'.

$$\begin{aligned}T(1-x) &= (1+x)(1-x) = 1-x^2 = 1\cdot(1-x^2)+0\cdot(-1+5x^2+4x^3) \\ [T(1-x)]_{B'} &= (1,0) \\ T(x^2) &= (1+x)x^2 = x^2+x^3 = a\cdot(1-x^2)+b\cdot(-1+5x^2+4x^3)\end{aligned}$$

I siste likhetstegn er venstre og høyre polynom like hvis og bare hvis koeffisientene foran like potenser av x er like. Da finnes $b = 1/4$ ved å sammenligne x^3-leddene, og da finnes $a = 1/4$ for eksempel ved å sammenligne konstant-leddene. Dermed er

$$[T(x^2)]_{B'} = (1/4, 1/4). \tag{3}$$

Da er $[T]_{B',B}$ gitt som

$$\begin{bmatrix}[T(1-x)]_{B'} & [T(x^2)]_{B'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1/4 \\ 0 & 1/4\end{bmatrix}.$$

Regner ut $T(-1+x-4x^2)$ ved å bruke matrisa funnet over:

$$\begin{aligned}[T(-1+x-4x^2)]_{B'} &= [T]_{B',B}[-1+x-4x^2]_B \\ &= \begin{bmatrix}1 & 1/4 \\ 0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 \\ -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dette er en koordinatvektor med basisen B', så da er $T(-1+x-4x^2) = -2(1-x^2)-1(-1+5x^2+4x^3) = -1-3x^2-4x^3$. Som kontroll ser vi at dette polynomet ligger i billedmengden til T.

Oppgave 4 La A være en kompleks skjev-hermitsk matrise. Matrisa kalles skjev-hermitsk hvis $A^* = -A$, der A^* er den konjugert-transponerte ($A^* = \bar{A}^T$).

a) Vis at iA er Hermitsk, der $i = \sqrt{-1}$.

En matrise er hermitsk hvis $A^* = A$.

$$(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA^* = i(-A^*) = iA,$$

der det at A er skjev-hermitsk benyttes ved siste likhetstegn.

b) Vis at A er unitært diagonaliserbar.

En kompleks matrise A er unitært diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal, det vil si at $AA^* = A^*A$. Og siden

$$AA^* = A(-A) = (-A)A = A^*A,$$

er A unitært diagonaliserbar.