LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1202/MA6202 VÅR 2010

Oppgave 1. **(a)** Radredusering gir

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R,$$

og siden R har to ledende variabler så får vi $\text{rank}(A) = 2$. Siden A har fire kolonner gir dimensjonsteoremet for matriser at

$$\text{nullity}(A) = 4 - \text{rank}(A) = 4 - 2 = 2.$$

(b) De ledende variablene i R har vi i kolonne 1 og 3, så da vil første og tredje kolonnevektor i A danne en basis for kolonnerommet. Dvs at

$$\{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$$

er en basis for kolonnerommet til A.

(c) Her har man to muligheter. Den ene er å bruke Gram-Schmidt direkte på de tre radvektorene til A, og dermed jobbe med tre vektorer. Men radrommet til A er det samme som radrommet til den reduserte matrisen R, siden radrommet ikke endrer seg når man radreduserer en matrise. Derfor kan vi finne en ortogonal basis for radrommet til A ved å anvende Gram-Schmidt på de ikke-trivielle radvektorene i R, og dem er det bare to av, nemlig

$$\mathbf{r}_1 = (2, 2, 4, 3) \text{ og } \mathbf{r}_2 = (0, 0, 6, 5).$$

Prosessen blir da:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{r}_1 \\ &= (2, 2, 4, 3) \\ \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\ &= (0, 0, 6, 5) - \frac{0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{2^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2}(2, 2, 4, 3) \\ &= (0, 0, 6, 5) - \frac{13}{11}(2, 2, 4, 3) \\ &= (-\frac{26}{11}, -\frac{26}{11}, \frac{14}{11}, \frac{16}{11}). \end{aligned}$$

Så mengden

$$\{(2, 2, 4, 3), (-\frac{26}{11}, -\frac{26}{11}, \frac{14}{11}, \frac{16}{11})\}$$

er en ortogonal basis for radrommet til A.

Oppgave 2. Definer matrisen M og vektoren $\mathbf{y}$ ved

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da vil koeffisientene a og b tilfredsstille

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y}.$$

Siden

$$M^T M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

er

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 4 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -14 \\ 62 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7/10 \\ 31/10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Derfor vil ligningen

$$y = -\frac{7}{10}x + \frac{31}{10}$$

best approksimere de fire punktene.

Oppgave 3. En matrise M er hermitisk dersom $M^* = M$. Reglene for å konjugert-transponere et produkt, trekke ut skalarer, at $I^* = I$ og at I kommuterer med alle matriser, gir

$$\begin{aligned} (DA)^* &= A^* D^* \\ &= A^* \left([3 - 3i]I\right)^* \\ &= (-i)A(\overline{3 - 3i})I \\ &= (-i)(3 + 3i)AI \\ &= (3 - 3i)AI \\ &= (3 - 3i)IA \\ &= DA, \end{aligned}$$

så DA er hermitisk. Alle hermitiske matriser er normale (en matrise M er normal dersom $MM^* = M^*M$), og et av resultatene sier at en normal matrise er unitært diagonaliserbar. Derfor er DA unitært diagonaliserbar.

Oppgave 4. **(a)** Matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$ er definert ved

$$[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = \left([T(x)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(x^2)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(x+\sin x)]_{\mathcal{B}_W} \mid [T(\cos x)]_{\mathcal{B}_W}\right).$$

Vi må med andre ord anvende T på hver av de fire basiselementene i $\mathcal{B}_V$, og så finne koordinatvektorene med hensyn på basisen $\mathcal{B}_W$ ved å uttrykke resultatet som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_W$. Siden

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 \\ &= 1\cdot 1 + 0\cdot(x+4) + 0\cdot \sin x + 0\cdot(2x+\cos x) \\ T(x^2) &= 2x \\ &= (-8)\cdot 1 + 2\cdot(x+4) + 0\cdot\sin x + 0\cdot(2x+\cos x) \\ T(x+\sin x) &= 1+\cos x \\ &= 9\cdot 1 + (-2)\cdot(x+4) + 0\cdot\sin x + 1\cdot(2x+\cos x) \\ T(\cos x) &= -\sin x \\ &= 0\cdot 1 + 0\cdot(x+4) + (-1)\cdot\sin x + 0\cdot(2x+\cos x) \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} [T(x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [T(x^2)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [T(x+\sin x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ [T(\cos x)]_{\mathcal{B}_W} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dette gir

$$[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En isomorfi er en lineærtransformasjon som er både injektiv (dvs en-til-en) og surjektiv (dvs på). For å avgjøre om T tilfredsstiller begge disse kravene kan man gå frem på to måter.

Den mest tidkrevende er å sjekke direkte. For å sjekke injektivitet må man da avgjøre om T sender ulike vektorer på ulike bilder, evt om kjernen til T bare inneholder nullvektoren (husk at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen inneholder kun nullvektoren). For å sjekke surjektivitet må man ta en tilfeldig vektor i W og vise at den treffes av en vektor i V. Strengt tatt holder det å vise at T *enten* er injektiv *eller* surjektiv, siden $\dim V = \dim W$. Et av resultatene sier nemlig at siden V og W har samme dimensjon (nemlig 4), så er T injektiv hvis og bare hvis den er surjektiv (men da må man selvsagt henvise til dette).

Den minst tidkrevende og mest elegante måten å avgjøre om T er en isomorfi på er å se på matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$. Den er inverterbar (determinanten er ulik null), så svaret på spørsmålet er ja; T er en isomorfi.

(b) For å finne $[v]_{\mathcal{B}_V}$ uttrykker vi v som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_V$:

$$2x + 3x^2 + 7\sin x = (-5)\cdot x + 3\cdot x^2 + 7\cdot(x+\sin x) + 0\cdot\cos x.$$

Da får vi

$$[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For å finne $[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$ kan man anvende T på v, og så finne koordinatvektoren for $T(v)$ ved å uttrykke denne som en lineærkombinasjon av vektorene i $\mathcal{B}_W$. Men husk at overføringsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$ nettopp har den egenskapen at den tar en koordinatvektor til en koordinatvektor. Så det beste er å bruke denne matrisen og koordinatvektoren vi nettopp fant:

$$\begin{aligned}
[T(v)]_{\mathcal{B}_W} &= [T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_V} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Oppgave 5. **(a)** Finner det karakteristiske polynomet til A:

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 8 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\left((\lambda-1)^2-8\right) - (-2+\lambda-1) \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda-7) - (\lambda-3) \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda-8) \\
&= (\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Egenverdiene til A blir dermed

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -2.$$

(b) For hver egenverdi λ må vi finne en tilhørende egenvektor v, dvs en ikke-triviell vektor i nullrommet til matrisen $\lambda I - A$.

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{aligned}
3I - A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_1 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned}
4I - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\lambda_3 = -2$:

$$\begin{aligned}
(-2)I - A &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_3 &= \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 14 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Det finnes mange andre (uendelig mange) egenvektorer, så matrisen P er ikke unik.

(c) Ved å rokkere om på differensialligningssystemet får vi

$$\begin{aligned} f' &= 3f + 0h + g \\ h' &= 2f + h - 8g \\ g' &= f - h + g, \end{aligned}$$

så ved å sette

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} f \\ h \\ g \end{pmatrix}$$

har vi

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Vi følger den vanlige oppskriften. Først setter vi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}$$

Deretter løser vi systemet

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u},$$

dvs de tre uavhengige differnsialligningene

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= 3u_1(x) \\ u_2'(x) &= 4u_2(x) \\ u_3'(x) &= -2u_3(x). \end{aligned}$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned} u_1(x) &= C_1e^{3x} \\ u_2(x) &= C_2e^{4x} \\ u_3(x) &= C_3e^{-2x}, \end{aligned}$$

hvor C_1, C_2, C_3 er vilkårlige konstanter. Løsningen av det opprinnelige systemet er nå $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ h \\ g \end{pmatrix} &= P\mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{3x} \\ C_2e^{4x} \\ C_3e^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - C_3e^{-2x} \\ C_1e^{3x} - 2C_2e^{4x} + 14C_3e^{-2x} \\ C_2e^{4x} + 5C_3e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Med andre ord, løsningen er

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - C_3e^{-2x} \\ h(x) &= C_1e^{3x} - 2C_2e^{4x} + 14C_3e^{-2x} \\ g(x) &= C_2e^{4x} + 5C_3e^{-2x} \end{aligned}$$

hvor C_1, C_2, C_3 er vilkårlige konstanter. Som nevnt i oppgave **(b)** er ikke matrisen P unik, og dette får selvsagt konsekvenser for løsningen på differensialligningssystemet. De som i oppgave **(b)** fikk en matrise P som ser annerledes ut, vil få en løsning i denne oppgaven som ser annerledes ut en den over.