**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



# LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I MA1202 VÅREN 2013

## Oppgave 1

**a)** Finner at $A$ er radekvivalent med matrisen

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $\operatorname{rang}(A) = 2$ og vet dermed at $\dim \operatorname{Kol}(A) = 2 = \dim \operatorname{Rad}(A)$.

1. Behøver å velge 2 lineæret uavhangige vektorer blant radvektorene til $A$. I dette eksemplet vil alle par av distinkte radvektorer gi en basis for radrommet til $A$.
2. Som over, må vi velge 2 linæert uavhengige kolonnevektorer fra $A$. Her vil alle par bortsett fra paret bestående av de to første kolonnene fra venstre gi en basis for kolonnerommet til A.
3. Vi løser det homogene likningsystemet $Rx = 0$ og finner at

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for nullrommet til $R$ og dermed en basis for nullrommet til $A$.

**b)** Finner at $\det(B_t) = (t-1)^2(t-2)$ og dermed er $\operatorname{rang}(B_t) < 3$ hvis og bare hvis $t = 1, 2$ (for alle andre verdier av $t$ så er $\operatorname{rang}(B_t) = 3$ da $B_t$ er inverterbar). For $t = 1$ og $t = 2$ er $B_t$ radekvivalent med hhv.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed er $\operatorname{rang} B_1 = 1$ og $\operatorname{rang} B_2 = 2$. Fra dimensjonssettningen for matriser finner vi at $\operatorname{nullitet}(B_1) = 3 - \operatorname{rang}(B_1) = 2$ og $\operatorname{nullitet}(B_2) = 1$.

**Oppgave 2**

**a)** Finner at karakteristiske polynomet til $C$ er $p_C(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 5)$. Dermed er $0, 2$ og $5$ egenverdiene til $C$. Vi finner egenvektorene til $C$ ved å løse det homogenelikningsystemet $(\lambda I - C)x = 0$.

$\underline{\lambda = 0}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 2t \\ x_3 = & t \end{cases} \Rightarrow \text{ basis: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\underline{\lambda = 2}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ basis: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\underline{\lambda = 5}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & t \\ x_3 = & -2t \end{cases} \Rightarrow \text{ basis: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

**b)** Siden $C$ er symmetrisk vet vi at den er ortogonalt diagonaliserbar. Vi behøver derfor å finne/velge en ortonormal mengde med 3 egenvektorer. Siden egenvektorer tilhørende ulilke egenrom er ortogonale og siden vi har 3 distinkte egenverdier behøver vi kun å normalisere egenvektorene fra **a)**. La

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Da vil

$$P = [v_1 | v_2 | v_3] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

gjøre jobben.

**Oppgave 3**

**a)** Da $P_2$ er en ikke-tom delmengde av vektorrommet av funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ kan vi bruke resultatet som sier at da er det nok å vise at $P_2$ er lukket mhp. addisjon og skalarmultiplikasjon.

La $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ og $c \in \mathbb{R}$.

<u>Addisjon:</u>

$$p(x)+q(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+b_0+b_1x+b_2x^2 = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \in P_2.$$

<u>Skalarmultiplikasjon:</u>

$$c \cdot p(x) = c(a_0 + a_1x + a_2x^2) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 \in P_2.$$

Betrakt $P_2$ som et indreproduktrom ved at

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

La $p_1(x) = x - x^2$ og $p_2(x) = 1 - x^2$ og sett $W = \operatorname{Span}\{p_1(x), p_2(x)\}$. La $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen gitt ved

$$T(q(x)) = \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix}.$$

**b)** Dette følger av at indreprodukt er lineær i begge variabeler og dermed spesielt i første variabel. Har at $\langle aq(x) + br(x), p(x)\rangle = a\langle q(x), p(x)\rangle + b\langle r(x), p(x)\rangle$. Får dermed at

$$\begin{aligned} T(aq(x)+br(x)) &= \begin{bmatrix} \langle aq(x)+br(x), p_1(x)\rangle \\ \langle aq(x)+br(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\langle q(x), p_1(x)\rangle + b\langle r(x), p_1(x)\rangle \\ a\langle q(x), p_2(x)\rangle + b\langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\langle q(x), p_1(x)\rangle \\ a\langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\langle r(x), p_1(x)\rangle \\ b\langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \langle r(x), p_1(x)\rangle \\ \langle r(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} \\ &= aT(q(x)) + bT(r(x)). \end{aligned}$$

for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $q(x), r(x) \in P_2$.

**c)** Har at

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{q(x) \in P_2 |\ T(q(x)) = 0\} \\ &= \left\{ q(x) \in P_2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x)\rangle \\ \langle q(x), p_2(x)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{q(x) \in P_2 |\ \langle q(x), p_1(x)\rangle = 0 = \langle q(x), p_2(x)\rangle\} \\ &= \{q(x) \in P_2 |\ \langle q(x), k_1p_1(x) + k_2p_2(x)\rangle = 0\ \forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{q(x) \in P_2 |\ \langle q(x), p(x)\rangle = 0\ \forall\ p(x) \in W\} \\ &= W^{\perp} \end{aligned}$$

For å finne en ortogonal basis for $P_2$ kan vi bruke at i et indreproduktrom så er en ortogonal mengde lineært uavhengig. Det er dermed nok å finne en ortogonal mengde med 3 vektorer siden $\dim P_2 = 3$. Merk at $p_1(x)$ og $p_2(x)$ er ortogonale da $\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = 0$. Siden $\operatorname{Ker} T = W^{\perp}$ ser vi at det er nok å velge $p_3 \neq 0 \in \operatorname{Ker} T$. Vi kan f.eks. velge $p_3(x) = x^2 + x$, da vil $\{p_1, p_2, p_3\}$ være en ortogonal basis for $P_2$.

**Oppgave 4** La $A$ være en $2 \times 2$, Markov og symmetrisk matrise og la $|q| < 1$ være en reell egenverdi for $A$.

**a)** Vi begynner med en generell $2 \times 2$-matrise

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Betingelsen at $M$ er symmetrisk ($M^T = M$) gir oss at

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

At $M$ er en Markovmatrise betyr at summen av elementene langs hver kolonne er 1. Dette gir at $a + b = 1$ og $b + d = 1$. Dermed har vi at $a = d$, dvs

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \ a + b = 1 \left( \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix} \right).$$

Vi ser på det karakteristiske polynomet til $M$:

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 - b^2 \\ &= (\lambda - a - b)(\lambda - a + b) = (\lambda - 1)(\lambda - q) \end{aligned}$$

som gir egenverdiene 1 og $q$, og der $q = a - b = a - 1 + a = 2a - 1$. Ved å substituere $a = \frac{1+q}{2}$ i $M$ får vi at $M$ kan uttrykkes som

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{bmatrix}$$

Vi finner egenrommene til $M$.
$\underline{\lambda = 1}$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-q & q-1 \\ q-1 & 1-q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & t \end{cases} \Rightarrow \text{basis: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\underline{\lambda = q}$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q-1 & q-1 \\ q-1 & q-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & -t \end{cases} \Rightarrow \text{basis: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**b)** Merk at denne Markovprosessen gir oss en symmetrisk Markovmatrise og vi kan dermed bruke det vi fant fra **a)**. En Markov matrise har som stabil-tilstandsvektor den unike sannsynlighetsvektorene fra egenrommet tilhørende egenverdien $\lambda = 1$. I dette tilfellet blir den stabile-tilstandsvektoren:

$$v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Dersom $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ er initial-fordelingen av røykere og ikke-røykere (dvs. $x_1 + x_2 = 1$) får vi at

$$M^n x^{(0)} \to [v|v]\, x^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

siden $x_1 + x_2 = 1$. Vi ser at i det lange løp vil fordeling mellom røykere og ikke-røykere gå mot $50 : 50$.

**Oppgave 5** La $\lambda$ være en egenverdi for $A$ og la $x \neq 0$ være egenvektor tilhørende $\lambda$, dvs. $Ax = \lambda x$. Hvis vi ser på $A^2 x$ får vi at $\lambda^2$ er egenverdi tilhørende egenvektoren $x$

$$A^2 x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

Samtidig har vi at $A^2 = A$, dette gir at $A^2 x = Ax$, som medfører at $\lambda^2 x = \lambda x$. Vi får da at $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$. Da $x \neq 0$ må $\lambda^2 - \lambda = 0$ som gir at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$ er eneste mulighet.