Våren 1995

Oppgave 1

a) Nei
b) 3
c) $\underline{v} = (1, 1, -1, 1, -t)$
d) $t \neq 1$
$\underline{v}_1 = (1, 0, t, 2)$ $\underline{v}_2 = (0, t, 2, 1)$ $\underline{v} = (1, 1, 3, 3)$

Oppgave 2

a) $\underline{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$ $\underline{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$
b) $\underline{a}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ $\underline{a}_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$
c) $\frac{5}{2}$

Oppgave 3

a) $\lambda = 0$ $\underline{v} = (1, 1)$
$\lambda = 2$ $\underline{v} = (1, -1)$
b) $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
c) $y'' = \frac{1}{4}(x'')^2$
e) Parabel dersom én egenverdi er null
Ellipse dersom begge egenverdiene har samme fortegn
Sirkel dersom begge egenverdiene er like
Hyperbel dersom egenverdiene har motsatt fortegn

Oppgave 5

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3}-i$

$z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$

Våren 1996

Oppgave 1 c) $P^{-1} = P^T$

d) $\begin{bmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -2 & 13 & -5 \\ -2 & -5 & 13 \end{bmatrix}$

Oppgave 2 c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0),\ \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-3)$

d) $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

e) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$

f) $(-2,-3,6), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{24}{\sqrt{12}})$

Oppgave 3 110, 80, 120

Oppgave 4 $-0,4 + 1,7x$

Oppgave 5 c) Egenverdier: $\lambda = 1$ med egenvektor $(1,0,0)$
$\lambda = \pm i$ med egenvektorer $(0,1,\pm 1)$

d) $p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Våren 1997

Oppgave 1 a) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $x_1 = e^{3t} + e^{-t}, x_2 = e^t + 2e^{-t}, x_3 = -e^{3t} + e^{-t}$

Oppgave 2 kr. 3, 1 og 2.

Oppgave 3 a) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

b) 494 400, 705 600
500 000, 700 000

Oppgave 4 Linje for $a = \pm 1$, hyperbel for $a^2 > 1$,
ellipse for $a^2 < 1$ med spesialtilfellet sirkel for $a = 0$.

Oppgave 5 (V forutsettes endeligdimensjonalt)

c) 1

d) $\dim V - 1$

e) $\det T = 1$ dersom $\dim V = 1$, $\det T = 0$ ellers.

Oppgave 6 d) $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

e) Egenverdier: ± 1.
Egenvektorer: $i \sin x \mp \cos x$

FASIT MNFMA108

Våren 1999

Oppgave 1

a) Rang $A = \begin{cases} 2 & \text{for } s = 0, s = 1 \\ 3 & \text{ellers} \end{cases}$

b) 1 løsning for $s \neq 0, 1$
0 løsning for $s = 0, t \neq 1$
0 løsning for $s = 1, t \neq 0$
∞ løsninger for $s = 0$ og $t = 1$
∞ løsninger for $s = 1$ og $t = 0$

Oppgave 2

a) dim 1, basis $\{\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

b) Rang $A = \begin{cases} 2 & \text{for } a = -2 \\ 3 & \text{for } a \neq -2 \end{cases}$

Oppgave 3

a) $L \geq 500, K \geq 1000, L + K \leq 3000$ og $L/300 + K/400 \leq 8$

b) Maks for $L = 600, K = 2400$. Fortjeneste $= 3120$ kr.

Oppgave 4

a) $P_m(\lambda) = (x - 1)(x - p + q)$, $P = \begin{bmatrix} q & -1 \\ 1 - p & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 5

a) $x^2 + 2xy + y^2 - x = 0$

b) $y = -x$

Oppgave 6

$U = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ egenverdier $1/\sqrt{2}(i \pm 1)$

Oppgave 7

a) Basis : $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$

c) dim $= \frac{1}{2}(n + 2)(n - 1)$

Våren 1998

Oppgave 2

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{matrix} R_n \rightarrow & -0,5R_0 + 0,75H_0 & = 25 \\ H_n \rightarrow & -R_0 + 1.5H_0 & = 50 \end{matrix}$

Oppgave 3

a) $\lambda_1 = 1 \quad V_1 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

$\lambda_2 = 2 \quad V_2 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$

c) $x(t) = C_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 4

$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50$

Løsningsforslag 30. mai 2000
MNFMA108 vår 2000

Oppg 1

Redusere A på trappeform

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 9 & -7 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- rang $A = 2$ (antall ledende enere)
- nullitet$(A) = 4 - \text{rang}A = 2$
- Basis for kol.rommet: de kolonnene i A som har ledende 1-er på trappeform

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

Evt.: tilsv. en basis for radrommet til A^T, så

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$

- Basis for radrommet: tilsv. basis for radrommet til den reduserte matrisa

$$\Rightarrow \{(1,0,-1,5), (0,-2,5,-6)\}$$

- Basis for nullrommet: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

MAi 2000

Oppg 2

a)

$$\int_{-1}^{1} x^n dx = \begin{cases} 0 & n \text{ odde} \\ \frac{2}{n+1} & n \text{ like} \end{cases}$$

P_2 har basis $\{\underline{u_1 = 1}, \underline{u_2 = x}, \underline{u_3 = x^2}\}$

Gram-Schmidt for å få ortogonal basis:

1. La $v_1 = 1^{(=u_1)}$, $\|v_1\|^2 = 2$
2. La $\underline{v_2} = \underline{u_2} - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \underline{v_1}$

$$= x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x \quad , \|v_2\|^2 = \frac{2}{3}$$

3. La $\underline{v_3} = \underline{u_3} - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \underline{v_1} - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \underline{v_2}$

$$= x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot x = x^2 - 1/3$$

$$\|v_3\|^2 = \frac{8}{45}$$

Normalisere vektorene ($\underline{w_i} = \frac{1}{\|v_i\|} \underline{v_i}$) og få flg ortonormale basis

$$\left\{ \underline{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \underline{w_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \underline{w_3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - 1/3\right) \right\}$$

b)

$T : P_2 \longrightarrow P_2$ gitt ved

$T(f) = x \cdot f' + f''$

- Vis at $T(f+g) = T(f) + T(g)$
  og $T(kf) = k\,T(f)$

- $T(a+bx+cx^2) = 2c + bx + 2cx^2$

$$\Longrightarrow \quad [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\operatorname{Ker} T = \{a+bx+cx^2 \mid b=c=0\} = \mathbb{R}$

- $R(T) = \{a+bx+cx^2 \mid a=c\}$

Oppg. 3

$$\underline{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T \underline{y}$$

1)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cancel{-}1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ -\frac{1}{2}g \end{bmatrix}$$

2)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -9 \\ 1 & 4 & -16 \end{bmatrix}, \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ \frac{1}{2}g \end{bmatrix}$$

3)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad s_0 = \frac{1398}{35}, \quad v_0 = \frac{143}{14}, \quad g = \frac{69}{7}$$

$$s_0 \simeq 39{,}94, \quad v_0 \simeq 10{,}21, \quad g \simeq 9{,}86$$

Hvis vi antar $s_0 = 40$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -9/2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -14 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~$v_0 = \frac{1403}{310} \simeq 4{,}53 \quad g = \frac{153}{31} \simeq 4{,}93$~~

$$v_0 = \frac{3151}{310} \simeq 10{,}16 \;,\; g = \frac{305}{31} \simeq 9{,}84$$

Mai 200

Oppg. 4:

a)

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(3)} = \underset{\sim}{L}^3 \underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1130\,q \\ 600\,q^2 + 90\,q \\ 245\,q \end{bmatrix}$$

(etter 3 år)

b)

Likevekt $\Longrightarrow$ den unike positive egenverdien $\lambda = 1$

$$p(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underset{\sim}{L}) = \lambda^3 - 2q\lambda - \tfrac{1}{2}q$$

$$p(1) = 0 \iff q = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

c)

Fordelingen (el. forholdet mellom klassene) er gitt ved egenv til $\lambda = 1$

Formel: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$ evt. beregn $\underline{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Totalt 640 flaggermus

$\longrightarrow$ 400 i kl. 1, 160 i kl. 2
80 i kl. 3.

Alternativt:

Likevekt $\Longrightarrow$ $x^{(n+1)} = Lx^{(n)} \simeq x^{(n)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$(\text{eg. } x^{(n+1)} \simeq \underset{\uparrow \text{unike pos. egenverdi}}{\lambda} x^{(n)})$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} a &= 2b + c \\ b &= qa \\ c &= 0{,}5b \end{aligned}$$

ɔ: $b = 2c$, $a = 5c$ og $b = qa$

$$\Downarrow$$

$$2c = q \cdot 5c$$

$$\underset{c \neq 0}{\Longrightarrow} q = \frac{2}{5}$$

Når $a+b+c = 640$

$\Longrightarrow$ $a+b+c = 5c + 2c + c = 8c = 640$

$\Longrightarrow$ $c = 80$, $b = 160$, $a = 400$

Oppg. 5:

a)

Må finne egenverdier og tilhørende egenvektorer

Egenv.: $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$: (basisv.) $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer for $\lambda_2 = 2$: (basisv.) $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{V_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ gir } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[mange mulige versjoner av dette]

b)

Har systemet $X' = AX$,
substituer $X = PU$ som gir
systemet $U' = DU$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{Generell løsning}$$

Initialbetingelsene gir løsningen

$$x_1(t) = 4e^{-t} - 4e^{2t}$$
$$x_2(t) = -2e^{-t} + 4e^{2t}$$
$$x_3(t) = -2e^{-t} + 3e^{2t}$$

Mai 2000

Oppg 6

a)

A hermittisk ɔ: $A^* = A$ ← $n \times n$-matrise

La λ være en egenverdi for A med tilhørende egenvektor $\underline{v} \neq \underline{0}$

Dvs. at $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$
Mult. likheten med $\underline{v}^*$

$$\Longrightarrow \quad \underline{v}^* A \underline{v} = \underline{v}^* \lambda \underline{v} = \lambda(\underline{v}^*\underline{v}) \quad (*)$$

$\underline{v}^* A \underline{v}$ og $\underline{v}^*\underline{v}$ er 1×1-matriser (ɔ: $\in \mathbb{C}$)

$$(\underline{v}^* A \underline{v})^* = \underline{v}^* A^* \underline{v}^{**} \overset{A \text{ herm.}}{=} \underline{v}^* A \underline{v} \quad \text{og}$$
$$(\underline{v}^*\underline{v})^* = \underline{v}^* \underline{v}^{**} = \underline{v}^*\underline{v}$$

ɔ: Disse er hermittiske matriser

En hermittisk matrise har kun reelle tall langs hoveddiagonalen

$$\Longrightarrow \underline{v}^* A \underline{v},\ \underline{v}^*\underline{v} \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{pga } (*))$$

[Merk: $(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A$, så ikke nødv. hermittisk (det er dette vi skal vise)]

b)

La

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*)$$

$$C = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

Da er $A = B + C$, B er hermittisk og C er skjev-hermittisk.

$$B^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = B$$

$$C^* = \frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - A^{**}) = -\frac{1}{2}(A - A^*) = -C$$

Løsningsforslag eksamen 21.nov. 2000

Oppg 1

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \text{rang} A = 3$

$\text{rang} A + \text{nullitet} A = 4 \Longrightarrow \underline{\text{nullitet} A = 1}$

$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \underline{0} \iff x = -w,\ y = -w$ og $z = -5w$

$$A \begin{bmatrix} -w \\ -w \\ -5w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w - 2w + 3w \\ -3w - 2w + 5w \\ -2w + w + w \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Basis for nullrommet til A: $\left\{ \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Basis for radrommet til A:

$\{[1,0,0,1], [0,1,0,1], [0,0,1,5]\}$

Basis for kolonnerommet til A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b)

A $n \times n$-matrise, inverterbar

B $n \times m$-matrise

$\Longrightarrow AB$ $n \times m$-matrise

$\text{rang}(AB) + \text{nullitet}(AB) = m$

$\text{rang}(B) + \text{nullitet}(B) = m$

$\underline{x} \in$ nullrommet til $AB \iff AB\underline{x} = \underline{0}$

$\iff A^{-1}AB\underline{x} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0} \iff B\underline{x} = \underline{0}$

$\iff \underline{x} \in$ nullrommet til B

$\Longrightarrow \text{nullitet}(AB) = \text{nullitet}(B)$

$\Longrightarrow \text{rang}(AB) = \text{rang}(B)$

Oppg 2

a) $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$

Karak. polynom: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0,7 & -0,3 \\ -0,3 & \lambda - 0,7 \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 0,7)^2 \div 0,09 = \lambda^2 - 1,4\lambda + 0,4$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 0,4)$

Egenverdier: $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0,4$

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 1$: $0,3x - 0,3y = 0 \Rightarrow x = y$ $\quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0,4$ $\quad -0,3x - 0,3y = 0 \Rightarrow y = -x$ $\quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}$

b) 6 800.000 stemmer ved hvert valg.

x_0 = rep. stemmer i 1960 (= 4.828.000)
y_0 = dem. " (= 1.972.000)

x_i = rep. stemmer ved valget i 1960+4i, i=0,1,2,...
y_i = dem. "

$\underline{v_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ $\quad i = 0,1,2,\ldots$

$\Rightarrow \quad \underline{v_i} = A\underline{v_{i-1}}$, der A fra a)

Valg resultatet i 2000 er $\underline{v_{10}}$

Siden $A = PDP^{-1}$, er $\underline{v_{10}} = A^{10}\underline{v_0} = PD^{10}P^{-1}\underline{v_0}$

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,4)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1/2(1+(0,4)^n) & 1/2(1-(0,4)^n) \\ 1/2(1-(0,4)^n) & 1/2(1+(0,4)^n) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{V_{10}} \simeq \begin{bmatrix} 3.400.150 \\ 3.399.850 \end{bmatrix}$

Den rep. kandidaten vinner valget i 2000 med 300 stemmer.

Når $n \to \infty$, så vil $(0{,}4)^n \to 0$

Dvs. at

$$A^n \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Dvs. at

$$v_n \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2(x_0+y_0) \\ 1/2(x_0+y_0) \end{bmatrix}$$

De to partiene vil få nøyaktig like mange stemmer.

Nov. 2000

Oppg. 3

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a) $B = \left\{ \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

1. B gen. M_{22}:

$$(b+c)\underline{v_1} + (a-b-c)\underline{v_2} + (b+2c+d-a)\underline{v_3} + (b+c+d-a)\underline{v_4} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2. $x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3} + w\underline{v_4} = \begin{bmatrix} x+y & x-z+w \\ z-w & y+w \end{bmatrix} = \underline{0}$

$\iff x = y = z = w = 0$

ɔ: B lin. uavh.

$\implies$ B er en basis for M_{22}.

(Kan også anta at kjent at rang $M_{22} = 4$. Da er det nok å vise enten 1. el. 2.)

b)

$T: M_{22} \longrightarrow M_{22}$ def. ved at

$$T(A) = A + A^T$$

T er lin. operator:

La $A, B \in M_{22}$ og $k \in \mathbb{R}$

$$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T$$
$$= A + B + A^T + B^T$$
$$= T(A) + T(B)$$

$$T(kA) = (kA) + (kA)^T = kA + kA^T = kT(A)$$

$\Rightarrow$ T er lin. operator på M_{22}

Matrisa til T m.h.p. $\mathcal{B}$:

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2v_1 + v_3$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(v_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2v_3 + 2v_4$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(v_1)]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, [T(v_2)]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, [T(v_3)]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, [T(v_4)]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$\Rightarrow$: Anta at $B \in R(T)$

Dvs at det finnes $A \in M_{22}$ slik at $T(A) = B$.

$\Longrightarrow B = A + A^T$

Da er

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = B$$

$\Longrightarrow B \in \{B \in M_{22} \mid B^T = B\}$

$\Leftarrow$: Anta at $B^T = B$.

Da er

$$T(\tfrac{1}{2}B) = (\tfrac{1}{2}B) + (\tfrac{1}{2}B)^T$$
$$= \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}B^T = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}B = B$$

$\Longrightarrow B \in R(T)$.

d) $A \in M_{22}$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$T(A) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}$$

$T(A) = \underline{0} \iff a = 0 = d$ og $c = -b$

$\iff A \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$

(Bruk evt. $[T]_B$)

Nov. 2000

Oppg. 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

(A hermitisk $\Rightarrow$ har kun reelle egenverdier)

a) karak. polynom: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -i \\ 0 & i & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2 + i^2\right] = (\lambda-2)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right]$

$= (\lambda-2)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 3\right] = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)$

Egenverdier: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1$: $\left.\begin{aligned} -x &= 0 \\ -y - iz &= 0 \\ iy - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0, \quad y = -iz$

$\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $\left.\begin{aligned} -iz &= 0 \\ iy &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = z = 0 \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 3$: $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y - iz &= 0 \\ iy + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \quad y = iz$

$\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$

La $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

P er nå inverterbar og

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\cancel{2}i & 0 & 3i \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 2y + iz \\ z' &= -iy + 2z \end{aligned}$$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{w}' = \underset{\text{fra a)}}{A}\underline{w}$$

Substituer $\underline{w} = \overset{\text{fra a)}}{P}\underline{u}$

$$\Rightarrow P\underline{u}' = AP\underline{u} \Rightarrow \underline{u}' = P^{-1}AP\underline{u} = D\underline{u}$$

Dette gir at

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{w} = P\underline{u} = \begin{bmatrix} C_2 e^{2t} \\ -iC_1 e^{t} + iC_3 e^{3t} \\ C_1 e^{t} + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= C_2 e^0 = C_2 = 4 \\ y(0) &= -iC_1 e^0 + iC_3 e^0 = -iC_1 + iC_3 = 0 \\ z(0) &= C_1 e^0 + C_3 e^0 = C_1 + C_3 = 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = C_3 = 3 \text{ og } C_2 = 4$$

Dvs. at

$$\begin{aligned} x(t) &= 4e^{2t} \\ y(t) &= -3ie^{t} + 3ie^{3t} \\ z(t) &= 3e^{t} + 3e^{3t} \end{aligned}$$

Kontroll:

$$x'(t) = 2\cdot 4e^{2t} = 2x(t)$$

$$y'(t) = -3ie^{t} + 9ie^{3t}$$

$$z'(t) = 3e^{t} + 9e^{3t}$$

$$2y(t) + iz(t) = -6ie^{t} + 6ie^{3t} + 3ie^{t} + 3ie^{3t}$$
$$= -3ie^{t} + 9ie^{3t} = y'(t)$$

$$-iy(t) + 2z(t) = -3e^{t} + 3e^{3t} + 6e^{t} + 6e^{3t}$$
$$= 3e^{t} + 9e^{3t} = z'(t) \qquad \text{OK}$$

Nov. 2000

Oppg. 5

a)

$$(*) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad , f, g \in \mathcal{P}_2$$

1)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = \langle g, f \rangle \quad f, g \in \mathcal{P}_2$$

2)

$$\langle f+g, h \rangle = \int_0^1 (f(x)+g(x))h(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 f(x)h(x)\,dx + \int_0^1 g(x)h(x)\,dx \qquad f, g, h \in \mathcal{P}_2$$
$$= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \qquad ((f+g)(x) = f(x) + g(x))$$

3) $k \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}_2$ $\quad ((kf)(x) = kf(x))$

$$\langle kf, g \rangle = \int_0^1 kf(x)g(x)\,dx = k\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$
$$= k\langle f, g \rangle$$

4) $f \in \mathcal{P}_2$

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

$$f(x)^2 \geq 0 \ \forall\, x \Longrightarrow \int_0^1 f(x)^2\,dx \geq 0$$
$$\Longrightarrow \langle f, f \rangle \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 f(x)^2\,dx = 0 \Longleftrightarrow f(x)^2 = 0 \ \forall$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \Longleftrightarrow f = 0$$

$\Longrightarrow$ (*) definerer et indreprodukt på $\mathcal{P}_2$

2) La $u_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, u_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} u_1$

$$\langle p_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (1+x^2)x\,dx = \int_0^1 (x+x^3)dx$$
$$= 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$\Rightarrow u_2(x) = (1+x^2) - \frac{3/4}{1/3} x = 1 - \frac{9}{4}x + x^2$$

$$\| u_2 \|^2 = \int_0^1 \left(1 - \frac{9}{4}x + x^2\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - 9/2 x + \frac{113}{16}x^2 - 9/2 x^3 + x^4\right)dx$$
$$= 1 - 9/2 \cdot 1/2 + 113/16 \cdot 1/3 - 9/2 \cdot 1/4 + 1/5 = \frac{43}{240}$$

$\{u_1, u_2\}$ er en ortogonal basis for V, men ikke ortonormal.

La $v_1 = \frac{1}{\| u_1 \|} u_1$. Dvs. $v_1(x) = \sqrt{3}\,x$

La $v_2 = \frac{1}{\| u_2 \|} u_2$. Dvs. $v_2(x) = \sqrt{\frac{15}{43}}(4 - 9x + 4x^2)$

Da er $\{v_1, v_2\}$ er ortonormal basis for V.

Kontroll:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{\frac{45}{43}}(4x - 9x^2 + 4x^3)dx$$
$$= \sqrt{\frac{45}{43}}(4 \cdot 1/2 - 9 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/4) = \sqrt{\frac{45}{43}}(2 - 3 + 1) = 0$$ OK.

b) $V = \{ p \in P_2 \mid p(x) = a + bx + ax^2 \}$

1) $p, q \in V$ ɔ: $p(x) = a + bx + ax^2$
$q(x) = c + dx + cx^2$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$$
$$= (a+c) + (b+d)x + (a+c)x^2 \in V$$
$$\Longrightarrow p + q \in V$$

2) $k \in \mathbb{R}$, $p \in V$ ɔ: $p(x) = a + bx + ax^2$

$$(kp)(x) = kp(x) = (ka) + (kb)x + (ka)x^2$$
$$\Longrightarrow kp \in V$$

$\Longrightarrow$ V er et underrom av P_2

c) La $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1 + x^2$

Da er $B = \{p_1, p_2\}$ en basis for V, men den er ikke ortonormal

Bruker Gram-Schmidt metoden (V en end. dim.)

1) La først $u_1 = p_1$
$$\| u_1 \|^2 = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

Nov. 2000

d)

Den beste tilnærmingen til $f(x) = 1+x$ med et polynom i V vil være

$\text{proj}_V f$

Siden $\{v_1, v_2\}$ fra c) er en ortonormal basis for V, er

$$\text{proj}_V f = \langle f, v_1 \rangle v_1 + \langle f, v_2 \rangle v_2$$

$$\langle f, v_1 \rangle = \int_0^1 (1+x)\sqrt{3}\,x\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (x+x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left(1/2 + 1/3\right) = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\langle f, v_2 \rangle = \int_0^1 (1+x)\sqrt{\frac{15}{43}}(4-9x+4x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{15}{43}}\int_0^1 (4-5x-5x^2+4x^3)\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{15}{43}}\left(4 - 5/2 - 5/3 + 1\right) = \sqrt{\frac{15}{43}} \cdot \frac{5}{6}$$

Dvs. at

$$(\text{proj}_V f)(x) = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\,x + \sqrt{\frac{15}{43}} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sqrt{\frac{15}{43}}(4-9x+4x^2)$$

$$= \frac{5}{2}x + \frac{25}{86}(4-9x+4x^2) = \frac{5}{43}(10 - x + 10x^2)$$

Eksamen

Løsningsforslag, MA108, 31 mai, 2002

Oppgave 1 a) Rang(A) = antall pivot-~~elementer~~ (evt. antall pivot-kolonner) til B $= \underline{\underline{3}}$

$\text{Rang}(A) + \dim(\text{null}(A)) = 5 \Rightarrow \dim(\text{null}(A)) = \underline{\underline{2}}$

$\dim(R(A)) = \text{Rang}(A) = \underline{\underline{3}}$

b) Basis radrommet : $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Basis søylerommet (fås ved å plukke ut pivot-kolonnenumrene (?: 1, 3, 4) i A) : $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

Basis for nullrommet til A finner vi ved å observere at x_2 og x_5 er fri variable i $A\vec{x} = \vec{0}$, der $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. Sett $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, henholdsvis $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, og regn ut $\vec{x}$ ved å bruke $B\vec{x} = \vec{0}$. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/2 \\ 0 \\ -4/3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 a) Ligningssystemets matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ er radekvivalent til } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at z og w er fri variable. Velg $z=1, w=0$, henholdsvis $z=0, w=1$, og finn løsningene til ligningssystemet: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Disse er ortogonale, og vi normaliserer for å finne en ortonormal basis for V: $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{u}_1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u}_2$

b) Man observerer faktisk lett at

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ er en}$$

ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ av ønsket art. Dersom man ikke observerer dette, kan man bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess, idet man ser at $\left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_2 \right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$. Vi får

$$\vec{e}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \text{ normalisert: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u}$$

$$\vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_3 \rangle \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ normalisert: } \vec{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Den beste approksimasjonen er den ortogonale projeksjonen av $\vec{\mathbf{u}}$ på V. Altså

$$\text{proj}_{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{u}}) = \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \vec{u}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}} .$$

<u>Oppgave 3</u> a) Vi får Markov-matrisen

$$P = \text{Til} \begin{array}{c|ccc} & \multicolumn{3}{c}{\text{Fra}} \\ & A & B & C \\ \hline A & 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ B & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ C & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{array}$$

Dersom $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ er fordelingen én dag, så er

fordelingen $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ neste dag gitt ved $\underline{\vec{y} = P\vec{x}}$.

Dersom $\vec{y} = \begin{bmatrix} 180 \\ 85 \\ 85 \end{bmatrix}$, så skal vi finne $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ gitt

ved $$\begin{bmatrix} 180 \\ 85 \\ 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

Vi får følgende utvidede matrise som skal settes på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.3 & 180 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 85 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 85 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 1 & 6 & 1 & 850 \\ 8 & 3 & 3 & 1800 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -45 & -5000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

Altså $\underset{A}{\underline{\underline{x_1 = 150}}}$, $\underset{B}{\underline{\underline{x_2 = 100}}}$, $\underset{C}{\underline{\underline{x_3 = 100}}}$

b) La $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ være fordelingen ved dag 0, og

la $\vec{x}_k = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ være fordelingen ved dag k.

Se lærebøka 4.9

Da er $\vec{x}_k = P^k \vec{x}_0$. P er en stokastisk matrise, og ifølge teori vil $\vec{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{}$ grensefordeling uansett $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$. Det betyr at grensen gir et bestemt forhold mellom fordelingen på (A), (B) og (C). Formulert anderledes: Det finnes en $\overset{\text{entydig}}{}$ sannsynlighets-vektor $\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, $q_i \geq 0, i = 1,2,3$, slik at $P\vec{q} = \vec{q}$.

Grensefordelingen ovenfor er gitt ved $\vec{q}$. Vi finner $\vec{q}$: $(I - P)\vec{q} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 & -0.3 \\ -0.1 & 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning:
$q_1 = 0.6$ (A)
$q_2 = 0.2 = q_3$ (B)(C)

Syklene vil tilnærmet fordele seg som:
A: 60% av 350 = $\underline{\underline{210}}$
B og C: 20% av 350 = $\underline{\underline{70}}$

Oppgave 4 a)

$$Q(x,y) = [x\ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A er symmetrisk og kan ortogonalt diagonaliseres:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Normalisert egenvektor til $\lambda = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

—— " —— $\lambda = 2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

La $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Da er $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$.

Dersom vi foretar substitusjonen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, så får vi:

$$1 = Q(x,y) = [x'\ y']\, P^{-1} A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x'\ y'] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\underline{= x'^2 + 2y'^2}$$

Dette er ligningen til en <u>ellipse</u>.

b) Ifølge teori (7.3 i læreboka) er maksimumsverdi, hhv. minimumsverdi, til $Q(x,y)$ dersom $x^2 + y^2 = 1$ største, hhv. minste, egenverdi til A, dvs. 2, hhv. 1.

Siden "vår" betingelse er $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$, så ser vi at

$$\max\{Q(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\} = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8}}$$

$$\min\{Q(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\} = 4 \cdot 1 = \underline{\underline{4}}$$

:
:

Oppgave 5

a) det(P) = 1, altså er P invertibel. Vi finner (dette er én måte) ved å foreta linjeoperasjoner på:

[i] refererer til linje (rekke)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{''P} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \circlearrowleft \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[2] \to [2]-[1] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{[3]\to[3]-[2]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$[1] \to [1]+[3] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{[3]\to-[3]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1 & -1 & -1}_{P^{-1}} \end{array}\right]$$

Altså er $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

---

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \div 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t^2+6 \end{bmatrix} \underset{[4]\to[4]-[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-5t+6 \end{bmatrix}$$

$''Q$

det(Q) = 1 altså er de tre øverste linjene (rekkene) lineært uavhengige. Da er

$\text{rang}(A_t) = 4 \Leftrightarrow t^2-5t+6 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 2,3.$

$\text{rang}(A_t) = 3 \Leftrightarrow t = 2,3.$

Når $t \neq 2, 3$, så er de fire kolonnevektorene til A_t en basis for kolonnerommet til A_t. Altså:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5t \\ 0 \\ 0 \\ t^2+6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Når $t = 2, 3$, så er de tre første kolonnevektorene til A_t en basis for kolonnerommet til A_t. Altså:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

EKSAMEN MA1202, 14. MAI 2004.

LØSNINGSFORSLAG

OBS! : Dette er et løsningsforslag – flere av oppgavene har også andre fullverdige løsninger.

Oppgave 1

a) Se på

$$\det(M_t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = t(0-3) - 1\cdot(-2-1)$$

$$= -3t + 3$$

Vi har at $\det(M_t) = 0 \iff t = 1$

Vurderer to tilfeller:

- Tilfelle 1: $t \neq 1$

Siden M_t er en 3×3 matrise, og $\det(M_t) \neq 0$ har vi at $\underline{\text{rang}(M_t) = 3}$ og $\underline{\text{nullity}(M_t) = 0}$

Videre vil radvektorene utspenne hele $\mathbb{R}^3$, så en basis for radrommet er (f.eks) $\underline{\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}}$ (standard basis for $\mathbb{R}^3$)

- Tilfelle 2: $t = 1$

Vi finner trappeformen til M_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M_1 på trappeform har 2 ledende 1

$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(M_1) = 2$.

Dimensjonsteoremet for matriser gir videre at

$\mathrm{nullity}(M_1) = 3 - \mathrm{rank}(M_t) = 3 - 2 = 1$

Vi vet at radrommet til en matrise ikke forandres ved elementære radoperasjoner, og at en basis for en matrise på trappeform er de radene med ledende 1. Av regningen over får vi dermed at en basis for radrommet til M_1 er: $\{(1,1,0),(0,1,-\frac{1}{2})\}$

b) Vi har at:

$$[T]_B = \left[\, [T(1)]_B \;\vdots\; [T(x)]_B \;\vdots\; [T(x^2)]_B \,\right]$$

Videre er:

$$T(1) = 2 + 2x + x^2 \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = 1 + 0x + 3x^2 \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = 0 + x - x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi

$$\underline{[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}}$$

Vi observerer at $[T]_B = M_2$ fra a). Vi vet da at $\text{nullity}([T]_B) = 0$. Dette gir at $\underline{\ker(T) = \{\underline{0}\}}$. Videre er T en-entydig hvis og bare hvis $\ker(T) = \{\underline{0}\}$ – altså er T en-entydig.

Oppgave 2

a) La $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \in W$ og $k \in \mathbb{R}$.
Vi har at $u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
Vil vise at $\underline{u} + \underline{v} \in W$, og $k\underline{u} \in W$ som vil være tilstrekkelig for å fastslå at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

1. $\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$;

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)$$
$$= (u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3)$$
$$= 0 + 0 = 0$$
$$\Longrightarrow \underline{u} + \underline{v} \in W$$

2. $k\underline{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$;

$ku_1 + ku_2 + ku_3$

$= k(u_1 + u_2 + u_3)$

$= k \cdot 0 \qquad = 0$

$\Rightarrow k\underline{u} \in W$

Altså er W et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Et plan i $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 2, Videre ligger de ikke-parallelle vektorene $\underline{u}_1 = (1,-1,0)$ og $\underline{u}_2 = (1,0,-1)$ i W, og de utgjør dermed en basis for W.

Bruker Gram-Schmidt metoden på $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

1. Sett: $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$, og $W_1 = \text{span}\{\underline{v}_1\}$

2. $\text{proj}_{W_1} \underline{u}_2 = \dfrac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2} \underline{v}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,0)$

$\underline{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \underline{u}_2 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

Sett: $\underline{v}_2 = (1,1,-2)$

Normaliserer vektorene:

$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{2}$

$\|\underline{v}_2\| = \sqrt{6}$

Sett $\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$\underline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

Nå vil $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ være en ortonormal basis for W.

Oppgave 3

Se på

$$\det\left(\tfrac{3}{2}I - L\right) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{9}{17} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -1\left(\frac{27}{136}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{36}{17}\right)$$

$$= -\frac{27}{136} + \frac{3}{2}\left(\frac{153-144}{68}\right)$$

$$= -\frac{27}{136} + \frac{27}{136} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en løsning av den karakteristiske likningen $\det(\lambda I - L) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en egenverdi for L.

Siden to påfølgende elementer i rad 1 i L er $\neq 0$ vet vi at λ_1 er <u>den</u> positive, dominante egenverdien til L. Videre, siden $\lambda_1 > 1$, kan vi av dette slutte at populasjonen på sikt vil være voksende.

Oppgave 4

a) Dersom likningssettet er konsistent får vi av 1. likning at $x_1 = 1$. Av likning 2. følger det dermed at $x_2 = 0$. D.v.s. $x_1 + 2x_2 = 1$, men dette samsvarer ikke med likning 3. Vi konkluderer med at likningsettet ikke har noen løsning.

På matriseform:

$$\underset{M}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}} \underset{\underline{x}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}} = \underset{\underline{b}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

Den tilhørende normalformen $M^T M \underline{x} = M^T \underline{b}$ blir da:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Løsningen av dette likningsettet gir minste kvadraters løsning av det opprinnelige likningsystemet.

Utvidet matrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 7 \\ 6 & 14 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Minste kvadraters løsning er:

$$\underline{x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}}$$

b) Vi observerer at punktene ikke ligger på linje. Vi har at den beste tilnærmingen av en rett linje $y = a + bx$ til de gitte punktene er gitt ved $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ der $\underline{v}$ er minste kvadraters løsning av systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Denne fant vi i a), og dermed er linja gitt ved:

$$\underline{y = 1 + \frac{1}{2}x}$$

Oppgave 5

a) Se på

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & 3i & 4 \\ 3-i & 1 & -2 & 2+i \\ -3i & -2 & -1 & 3-i \\ 4 & 2-i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Ser at $A^* = A$, altså er A hermitisk.

- Vi vet at en matrise er unitært diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal. Siden A er hermitisk er den også normal $(A^*A = AA = AA^*)$.

Konklusjon: A er unitært diagonaliserbar

b) Siden B er hermitisk finnes en unitær matrise P som diagonaliserer B. D.v.s $B = PDP^*$, der diagonalmatrisen D er reell siden egenverdiene til B er reelle. Nå er

$$\det(B) = \det(PDP^*) = \det(P)\det(D)\det(P^*) = \det(D)$$

Men, $\det(D)$ er lik produktet av egenverdiene til B – som er reelle. Dermed er $\det(B)$ reell.

Løsningforslag eksamen i MA1202 3. juni 2005

Oppg 1

ⓐ $t=0$ $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rank}(A_0) = 3$

$t \neq 0$ $\quad A_t \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&t&0 \\ 0&0&1&t \\ 0&1&0&\frac{1}{t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&t&0 \\ 0&0&1&t \\ 0&0&-t&\frac{1}{t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&t&0 \\ 0&0&1&t \\ 0&0&0&t^2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = 0$ når $t^2 + \frac{1}{t} = 0 \iff t^3 = -1 \iff t = -1$

for $t \neq 0$ og $t \neq -1$ $\quad$ rang $(A_t) = 4$, $\det(A_t) \neq 0$

for $t = -1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang $(A_{-1}) = 3$

ⓑ 1. $t \neq 0$ og $t \neq -1$ $\quad$ rang $(A_t) = 4$ $\quad$ systemet har 1 og bare 1 løsning

2. $t = 0$ $\quad A_0\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ siden $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin$ søylerom A_0

fins det ingen løsning til $\quad A_0 x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $t = -1$ $\quad \underset{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4}{\begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&-1&0&1 \end{pmatrix}} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -a_1 + a_2 - a_3 - 2a_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in$ søylerom A_{-1}

(*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in$ Søylerom A_{-1} $\Rightarrow$ det fins minst en løsning av $A_{-1}\,x = b_{-1}$

(**) rank $(A_{-1}) = 3 < 4$ $\Rightarrow$ det fins uendelig mange løsninger av $A_{-1}\,x = 0$

(*) (**) $\Rightarrow$ $A_{-1}\,x = b_{-1}$ har uendelig mange løsninger
(side 249 Anton Rorres)

Oppgave 2

a) $p(x) \in \mathbb{P}_2$ $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $T_1(p) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$

$$(T_2 \circ T_1)(p) = T_2(T_1(p)) = a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2$$

nå gitt $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, vil vi finne $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

s.a. $p(x) = (T_2 \circ T_1)^{-1}(q)$.

$$p = (T_2 \circ T_1)^{-1}(q) \iff (T_2 \circ T_2)\, p = q$$

$$\iff a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$\iff \begin{matrix} a_0 = b_0 \\ 2a_1 = b_1 \\ 3a_2 = b_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a_0 = b_0 \\ a_1 = \frac{b_1}{2} \\ a_2 = \frac{b_2}{3} \end{matrix}$$

d.v.s. $(T_2 \circ T_1)^{-1}(q) = (T_2 \circ T_1)^{-1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = b_0 + \frac{b_1}{2} x + \frac{b_2}{3} x^2$

b) $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$

$(T_2 \circ T_1)(1) = 1 \qquad [(T_2 \circ T_1)(1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(T_2 \circ T_1)(x-1) = 2x-1 = 2(x-1)+1 \qquad [(T_2 \circ T_1)(x-1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T_2 \circ T_1)((x-1)^2) = (x-1)^2 + 2x(x-1) = 3(x-1)^2 + 2(x-1) \qquad [(T_2 \circ T_1)(x-1)^2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[(T_2 \circ T_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $p \in \mathbb{P}_3 \quad p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$T_2(p) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

Teor 8.2.3 s. 379 Anton & Rorres

$$\dim \mathbb{P}_3 = 4 = \dim \ker(T_2) + \dim R(T_2)$$

nå $\ker(T_2) = \left\{ q \in \mathbb{P}_3 : \frac{dq}{dx} = 0 \right\} = \{\text{konstanter}\}$
$= \text{span}\{1\}$

$\Rightarrow \dim \ker(T_2) = 1$
$\text{nullity}(T_2) = 1$

$4 = 1 + \text{rang}(T_2) \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(T_2) = 3$

Oppgave 3

ⓐ Egenverdiene til A:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+2)\left((\lambda+2)^2-1\right) + $$

$$+1\cdot\left(-1\cdot\left((\lambda+2)^2-1\right)\right) =$$

$$= (\lambda+2)^2\left((\lambda+2)^2-1\right) -\cdot\left((\lambda+2)^2-1\right)$$

$$=\left(\underbrace{(\lambda+2)^2-1}\right)\left((\lambda+2)^2-1\right)$$

$$\lambda^2+4\lambda+4-1=0$$

$$\lambda^2+4\lambda+3=0$$

$$\lambda_{12}=\begin{cases}-3\\-1\end{cases}$$

Egenvektorer til A:

$$\lambda=-1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

løsning $x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

egenrom = span $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ = span $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{ortonormal basis}}\right\}$

$$\lambda=-3 \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Lösning $x = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ p \\ -p \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

egenrum = Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ = Span $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{ortonormal basis}} \right\}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad P^TP = I$$

$$P = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \qquad P^T = P$$

$$P^TAP = PAP = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\tilde{A}Q & 0 \\ 0 & Q\tilde{A}Q \end{pmatrix}$$

$$Q\tilde{A}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $A = PDP \qquad\qquad P^T P = I$

$$y' = Ay \quad \Longleftrightarrow \quad y' = PDPy \qquad\qquad z := Py$$

$$y(0) = y_0 \qquad\qquad\qquad y(0) = y_0$$

$$\dot{z} = P\dot{y} = Dz$$

$$z(0) = Py(0)$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} e^{-3t} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$y(t) = Pz(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Oppgave 4

$$\tau_1 = \frac{\tau_2 + \tau_4}{4}$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1 + \tau_3 + \tau_5}{4}$$

$$\tau_3 = \frac{\tau_2 + \tau_6}{4}$$

$$\tau_4 = \frac{\tau_1 + \tau_5 + 1}{4}$$

$$\tau_5 = \frac{\tau_4 + \tau_2 + \tau_6 + \tau_7}{4}$$

$$\tau_6 = \frac{\tau_5 + \tau_3 + 1}{4}$$

$$\tau_7 = \frac{1 + \tau_5 + 1 + 1}{4}$$

ganger begge sider av alle ligninger med 4 og setter alle ukjente på venstre side og

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ \tau_7 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

Oppgave 5

Anta A $n \times n$ kompleks, skjevhermitsk d.v.s. $A^* = -A$ $\quad A^* = \bar{A}^T$

$Ax = \lambda x$ $\quad$ λ eigenverdi $\quad x$ egenvektor, anta $x^* x = 1$

da $\quad x^* A x = \lambda$

og $\quad \bar{\lambda} = \overline{x^* A x} = x^* A^* x = - x^* A x = -\lambda$

λ er et komplekstall d.v.s. $\quad \lambda = a + ib$

og $\quad \bar{\lambda} = a - ib$

$\bar{\lambda} = -\lambda \Leftrightarrow \quad a \cancel{-ib} = -a \cancel{-ib} \quad \Rightarrow \quad 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$\lambda = ib$ $\quad$ ren immaginær.

Oppg 1

a) $\det(A_t) = t(-1+t^2)$

matrisa er singulær for $t=0$ og $t=\pm 1$ ellers har A_t max rang dvs 3.

- $t=0$ $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang$(A_0)=2$ $\quad$ nullitet$(A_0)=1$
- $t=1$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang$(A_1)=2$ $\quad$ nullitet$(A_1)=1$
- $t=-1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang$(A_{-1})=2$ $\quad$ nullitet$(A_{-1})=1$

ellers er rang$(A_t)=3$ nullitet$(A_t)=0$

b) 1) For $t \neq 0$ og $t \neq -1$ og $t \neq 1$

er A_t inverterbar og ligningsystemet har nøyaktig en løsning

2) for $t=0$ man får løsninger av type $\begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma \in \mathbb{R}$

uendelig mange løsninger

for $t=1$ man får løsninger av type $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix}$ $\quad \beta \in \mathbb{R}$

uendelig mange løsninger

3) $t=-1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A_{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Siden $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

man får ingen løsning.

Oppg 2

a) $\mathcal{K} \subset M_{3\times 3}$ ($\mathcal{K}$ er submengde av vektorrommet av 3×3 matriser)

Vi må vise at $\mathcal{K}$ er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.

addisjon
$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(a_1+a_2) & 0 & c_1+c_2 \\ -(b_1+b_2) & -(c_1+c_2) & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

skalarmultiplikasjon $\gamma \in \mathbb{R}$
$$\gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma a & \gamma b \\ -\gamma a & 0 & \gamma c \\ -\gamma b & -\gamma c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

derfor er $\mathcal{K}$ et underrom av $M_{3\times 3}$.

Alle matriser i $\mathcal{K}$ kan skrives som

$a E_1 + b E_2 + c E_3$ derfor E_1 E_2 E_3 genererer $\mathcal{K}$.

I tillegg er E_1, E_2, E_3 lineær uavhengig fordi
$$\lambda E_1 + \mu E_2 + \gamma E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \gamma \\ -\mu & -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \mu = 0 \quad \gamma = 0 .$$
(dvs. $\{E_1, E_2, E_3\}$ er en basis for $\mathcal{K}$)

E_1, E_2, E_3 er ortogonale m.h.p. det gitte indreproduktet

og $\{\frac{1}{\sqrt{2}} E_1 , \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 , \frac{1}{\sqrt{2}} E_3\}$ er en ortonormal basis

b) $T(A) = E_1 A - A E_1$

Vi verifiserer at definisjonene av lineær transformasjon (s. 366 Anton & Rorres) er oppfylt.

- $T(A_1 + A_2) = E_1(A_1+A_2) - (A_1+A_2)E_1$

$$= E_1A_1 - A_1E_1 + E_1A_2 - A_2E_1$$

$$= T(A_1) + T(A_2)$$

- $T(\gamma A) = E_1(\gamma A) - (\gamma A)E_1$

$$= \gamma(E_1A - AE_1) = \gamma \cdot T(A)$$

ok!

Matrisen til transformasjonen.

$$[T]_{\mathcal{D}} = \Big[[T(E_1)]_{\mathcal{D}} \; [T(E_2)]_{\mathcal{D}} \; [T(E_3)]_{\mathcal{D}} \Big]$$ S 392 Anton Rorres

og vi har at for $\underset{\underset{\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}}{\shortparallel}}{A} \in \mathcal{C}$ $\quad [A]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Vi har $[T(E_1)]_{\mathcal{D}} = [0]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$[T(E_2)]_{\mathcal{D}} = [E_1E_2 - E_2E_1]_{\mathcal{D}} = [E_3]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$[T(E_3)]_{\mathcal{D}} = [E_1E_3 - E_3E_1]_{\mathcal{D}} = [E_2]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

derfor $[T]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

ⓒ $\det([T]_{\mathcal{D}}) = 0 \Rightarrow$ T er ikke en-entydig

$R(T) = \{ B \in \mathcal{C} \text{ s.a } B = T(A) \text{ med } A \in \mathcal{C} \}$

$A = aE_1 + bE_2 + cE_3 \quad T(A) = aT(E_1) + bT(E_2) + cT(E_3) =$

$= bE_3 + cE_2 \qquad R(T) = \text{span}\{E_2, E_3\}$

$\text{Ker}(T) = \{ C \in \mathcal{C} \text{ s.a. } T(C) = 0 \}$

$$C = \hat{a} E_1 + \hat{b} E_2 + \hat{c} E_3$$

$$T(C) = \hat{b} E_3 + \hat{c} E_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\hat{b} = 0 \qquad \hat{c} = 0$$

$$\Rightarrow \ \ker(T) = \text{span}\{E_1\}$$

Oppg 3

A er normal $\Longleftrightarrow$ $A^H A = A A^H$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den gitte matrisen er normal.

Egenverdiene til A er 1 go egenverdiene til $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

$$\lambda = 1 \pm 2i$$

Man finner egenvektorene til $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad w = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

for A $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tilde{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorene. Da

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ og vi har $$U^H A U = \begin{pmatrix} 1+2i & & \\ & 1-2i & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Oppg 4

$T(A) = S^{-1}AS$

λ er egenverdi til A $\Leftrightarrow$ $\exists\, x \neq 0$ s.a. $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow$ $S^{-1}Ax = \lambda S^{-1}x$ $\Leftrightarrow$ $S^{-1}AS(S^{-1}x) = \lambda S^{-1}x$

$\Leftrightarrow$ $T(A)\,(S^{-1}x) = \lambda\,(S^{-1}x)$

i tillegg $S^{-1}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
derfor $y = S^{-1}x$ er egenvektor for $S^{-1}AS = T(A)$
med λ som egenverdi

Oppg 5

$$\begin{array}{c|cc} & \text{blå} & \text{rød} \\ \text{blå} & \frac{45}{100} & \frac{60}{100} \\ \text{rød} & \frac{55}{100} & \frac{40}{100} \end{array} = P$$

P er regulær (s. 581 Anton Rorres)
(fordi P har alle elementer positive)

Siden P er regulær da finns det en likevektst vektor q og den er s.a. $Pq = q$ (s. 583) q er en sannsynlighet vektor

$(P-I)\,q = 0$

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -55 & 60 \\ 55 & -60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{60}{55} \cdot q_2 = \frac{12}{11} q_2$$

i tillegg q er sannsynlighets vektor dvs $q_1 \geq 0$ $q_2 \geq 0$
og $q_1 + q_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{12}{11} q_2 + q_2 = 1$ $\Rightarrow$

$q = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ dvs 52.1739 % blå papir
47.8261 % rød papir

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Truls Fretland (73 55 89 87)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

LØSNINGSFORSLAG
Bokmål
Tirsdag 23. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 13. juni 2006

Hjelpemidler:
Rottman formelsamling. Enkel kalkulator (HP30S)

Oppgave 1 Gitt vektoren $\mathbf{b}$ og de to radekvivalente matrisene A og B:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn rang(A) og dimensjonen til nullrommet til A. Hva er dim($R(A)$), når $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\}$?

Siden matrisene A og B er radekvivalente, og B har to ledende enere, så har B to lineært uavhengige kolonner. Da har også A to lineært uavhengige kolonner, og rang(A)=2. Dimensjonen til kolonnerommet, dim(R(A)), er lik 2 siden rangen til A er 2. Dimensjonen til nullrommet finnes av dimensjonsteoremet: dim(R(A)) + dim(Null(A))=n, der n er antall kolonner i A. Da er dim(Null(A))=2-2=0. Så dimensjonen til nullrommet til A er 0.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A, $R(A)$, og en basis for nullrommet til A^T, Null(A^T).

Siden de to kolonnene i A er lineært uavhengige danner de en basis for kolonnerommet til A, så mengden

$$\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\}$$

danner en basis for kolonnerommet til A. Nullrommet til A^T finnes ved å transponere A og finne nullrommet til denne:

$$A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Nullrommet er alle løsninger av $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siden A^T allerede er på trappeform, finnes løsningen ved å velge x_3 og x_4 som frie variable. Tilbakesubstitusjon gir da

$$\begin{aligned} x_4 &= s \\ x_3 &= t \\ x_2 &= -3s - 2t \\ x_1 &= -s - t - (-3s - 2t) = 2s + t, \end{aligned}$$

der $s, t \in \mathbf{R}$. På vektorform:

$$x = s\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Det gir at mengden

$$\{\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\}$$

danner en basis for nullrommet til A^T.

Gitt indreproduktrommet $\mathbf{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

c) Bruk minste kvadraters metode til å finne ligningen for den rette linja, $y = ax + b$, som passer best til datasettet gitt i Tabell 1. Finn projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A.

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Tabell 1: Datasett

(Se eksempel 1 s. 471 i Anton/Rorres) Ved å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ finner vi koeffisientene til linja $y = ax + b$. Normalligningene er $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Setter opp totalmatrisen til normalligningssystemet og gausseliminerer:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 14 & 23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir at $x_2 = 1$ og $x_1 = 0.5(6 - 3x_2) = 3 - 1.5 = 1.5$. Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \end{bmatrix}^T$. Ligningen for den rette linja blir da $y = 1.5 + x$. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A er gitt av $A\mathbf{x}'$:

$$\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

(Kommentar: I oppgaveteksten var det bare bedt om projeksjonen, men det enkleste her, og det som var tenkt spurt etter var den ortogonale projeksjonen. En annen riktig projeksjon på kolonnerommet vil gi lik uttelling.)

d) Vis at $\mathbf{b} - A\mathbf{x}' \in \text{Null}(A^T)$, der $\mathbf{x}'$ er minste kvadraters løsning funnet i oppgave c).

Bruker resultatene fra c) og b):

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden vektoren $\mathbf{b} - A\mathbf{x}'$ kan skrives som en lineær-kombinasjon av basisen til $\text{Null}(A^T)$ ligger den i $\text{Null}(A^T)$.

e) Finn en ortogonal basis for $R(A)$, kall denne B. Finn en ortogonal basis for $\text{Null}(A^T)$, kall denne B'. Forklar (kort) hvorfor $B \cup B'$ danner en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$.

Ortogonaliserer $R(A)$ og Null(A^T) hver for seg. Bruker Gram-Schmidt (bruker koordinatvektorer for å spare plass) på basisen for kolonnerommet, vektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \quad W_1 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1), \quad \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2\\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2\\
&= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1\\
&= (0,1,2,3) - \frac{(0,1,2,3)\cdot(1,1,1,1)}{4}(1,1,1,1)\\
&= (0,1,2,3) - 3/2(1,1,1,1) = (-3/2,-1/2,1/2,3/2)
\end{aligned}$$

Bruker deretter Gram-Schmidt på basisen til Null(A^T), som vi kaller for $\mathbf{u}_3$ og $\mathbf{u}_4$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 = (1,-2,1,0), \quad W_3 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_3), \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{6}\\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{u}_4 - \mathrm{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4\\
&= \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3\\
&= (2,-3,0,1) - \frac{(2,-3,0,1)\cdot(1,-2,1,0)}{6}(1,-2,1,0)\\
&= (2,-3,0,1) - 4/3(1,-2,1,0) = (2/3,-1/3,-4/3,1).
\end{aligned}$$

Teorem 6.2.6 (s.312) i Anton/Rorres gir at vektorene i R(A) og Null(A^T) står ortogonalt på hverandre. Da blir

$$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\} = \{(1,1,1,1),(-3/2,-1/2,1/2,3/2),(1,-2,1,0),(2/3,-1/3,-4/3,1)\}$$

en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$, med hensyn på det euklidske indreproduktet.

Oppgave 2 Matrisen M gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 4/5 & 1/5\\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

har to distinkte egenverdier.

a) Finn egenverdiene og en basis for de to egenrommene E_1 og E_2 til M.

Finner egenverdiene ved å bestemme hvilke λ som gjør at matrisen $(\lambda I - A)$ er singulær:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & \lambda - 4/5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)((\lambda - 4/5)^2 - 1/25) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 8/5\lambda + 3/5) = 0.$$

Denne har løsningene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 0.6$. Egenverdien λ_1 innsatt i egenverdiligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ gir etter gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ved å sette $x_1 = s$ og $x_3 = t$, der $s, t \in \mathbf{R}$ og ikke begge lik null, fåes $x_2 = t$. Egenvektorene er dermed gitt av

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenverdien $\lambda_3 = 0.6$ innsatt i egenverdiligningen gir etter gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrommene er:

$$E_1 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$$
$$E_2 = \text{span}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\}$$

b) Finn en matrise P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen D, slik at $P^{-1}MP = D$.

Matrisen P består av egenvektorene til M og D er en diagonalmatrise med de tilhørende egenverdiene langs diagonalen.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Som kontroll kan man sjekke at faktisk $P^{-1}MP = D$.

c) En kantine serverer kjøtt-, fiske- og vegetar-måltider til 100 faste middagsgjester. Kokken er en noe spesiell hobbymatematiker og ønsker å forutsi hvordan middagsgjestene fordeler seg på de ulike rettene. Kokken har observert følgende: De som spiser vegetar spiser vegetar neste dag. Av de som spiser kjøtt spiser 80% kjøtt neste dag og 20% fisk neste dag. Av de som spiser fisk spiser 80% fisk neste dag og 20% kjøtt neste dag. Hvis det en gitt dag er 10 personer som spiser vegetar, 80 som spiser kjøtt og 10 som spiser fisk, hvordan fordeler disse seg da etter 5 dager?

Valg av middag kan betraktes som en markov-prosess med 3 ulike tilstander. Tilstand 1 er å spise vegetarmiddag, tilstand 2 å spise kjøttmiddag og tilstand 3 å spise fiskemiddag. Fra de oppgitte data ser vi at resultatet fra oppgave b) kan brukes. Gitt fordelingen en dag $\mathbf{x}_n$, så vil fordelingen neste dag, $\mathbf{x}_{n+1}$, være gitt av

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n,$$

der $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^3$ og M er overgangsmatrisen fra oppgave b). Etter 5 dager vil da fordelingen være gitt ved

$$\mathbf{x}_5 = M^5\mathbf{x}_0, \tag{1}$$

der $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}10 & 80 & 10\end{bmatrix}^T$. I oppgave b) fant vi ut at M kunne diagonaliseres slik at $M = PDP^{-1}$. Innsatt i ligning (1) fåes

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_5 &= (PDP^{-1})^5\mathbf{x}_0 = PD^5P^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.6\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.6^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5389 & 0.4611\\ 0 & 0.4611 & 0.5389\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 80\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 47.7\\ 42.3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Etter 5 dager gir modellen at middagsgjestene er fordelt slik: 10 vegetar, 48 kjøtt og 42 fisk.

Oppgave 3 La P_2 være vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 2. La $V = \{p(x) \mid p(x) = a - ax + bx^2 \in P_2, a, b \in \mathbf{R}\}$ være et vektorrom.

a) Vis at V er et underrom av P_2.

Representerer vektorene i V som koordinatvektorer med hensyn på standardbasisen $\{1, x, x^2\}$: $\mathbf{v}_1 = (a_1, -a_1, b_1)$ og $\mathbf{v}_2 = (a_2, -a_2, b_2)$, der $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P_2$, slik at V er en delmengde av P_2. For at V skal være et underrom av P_2 må det være lukket under addisjon;

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (a_1, -a_1, b_1) + (a_2, -a_2, b_2) = (a_1 + a_2, -a_1 - a_2, b_1 + b_2) = (a, -a, b) \in V,$$

og skalarmultiplikasjon;

$$k\mathbf{v}_1 = k(a_1, -a_1, b_1) = (ka_1, -ka_1, kb_1) = (a, -a, b) \in V,$$

så V er et underrom av P_2.

La $T : V \to W$ være en transformasjon definert ved

$$T(p) = (1 + x)p(x),$$

der W er et underrom av P_3.

b) Vis at T er en lineær transformasjon. Finn billedmengden til T, $R(T)$.

Transformasjonen $T : V \to W$ er lineær hvis og bare hvis følgende to krav er oppfylt:

1. $T(p + q) = T(p) + T(q)$
2. $T(kp) = kT(p)$,

der $p, q \in V$ og $k \in \mathbf{R}$. Sjekker krav 1:

$$\begin{aligned} T(p + q) &= (1 + x)(p(x) + q(x)) = (1 + x)p(x) + (1 + x)q(x) \\ &= T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Krav 2:

$$T(kp) = (1 + x)(kp)(x) = k(1 + x)p(x) = kT(p)$$

Siden begge kravene er oppfylt er T en lineær transformasjon.
La $p(x) = a - ax + bx^2 \in V$. Da er

$$\begin{aligned} T(p) &= T(a - ax + bx^2) = (1 + x)(a - ax + bx^2) \\ &= (a - ax + bx^2) + (ax - ax^2 + bx^3) \\ &= a + (b - a)x^2 + bx^3 \end{aligned}$$

Fra utregningen av $T(p)$ ser vi at billedmengden til T er mengden av alle polynom på formen $a + (b - a)x^2 + bx^3$, der $a, b \in \mathbf{R}$.

Betrakt nå indreproduktrommene V og W, med indreprodukt definert ved

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx. \tag{2}$$

- **c)** Gitt basisen $B = \{(1-x), x^2\}$ for V og basisen $B' = \{1-x^2, -1+5x^2+4x^3\}$ for W. Vis at mengden B' er ortogonal med hensyn på indreproduktet gitt av (2). Finn matrisen til T, $[T]_{B',B}$, og bruk denne til å regne ut $T(-1+x-4x^2)$.

Mengden B' er ortogonal hvis indreproduktet mellom de to vektorene i mengden er lik null.

$$\begin{aligned}\langle 1-x^2, -1+5x^2+4x^3\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(-1+5x^2+4x^3)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} -1+5x^2+4x^3+x^2-5x^4-4x^5\mathrm{d}x\\ &= [-x+2x^3+x^4-x^5-4/6x^6]_{-1}^{1}\\ &= [-x+2x^3-x^5]_{-1}^{1} = (-1+2-1)-(1-2+1) = 0.\end{aligned}$$

Dermed er B' ortogonal med det gitte indreproduktet.
For å finne matrisen må vi transformere hver av basisvektorene i basisen B og deretter uttrykke de som koordinatvektorer mhp. basisen B'.

$$\begin{aligned}T(1-x) &= (1+x)(1-x) = 1-x^2 = 1\cdot(1-x^2)+0\cdot(-1+5x^2+4x^3)\\ [T(1-x)]_{B'} &= (1,0)\\ T(x^2) &= (1+x)x^2 = x^2+x^3 = a\cdot(1-x^2)+b\cdot(-1+5x^2+4x^3)\end{aligned}$$

I siste likhetstegn er venstre og høyre polynom like hvis og bare hvis koeffisientene foran like potenser av x er like. Da finnes $b=1/4$ ved å sammenligne x^3-leddene, og da finnes $a=1/4$ for eksempel ved å sammenligne konstant-leddene. Dermed er

$$[T(x^2)]_{B'} = (1/4, 1/4). \tag{3}$$

Da er $[T]_{B',B}$ gitt som

$$\begin{bmatrix}[T(1-x)]_{B'} & [T(x^2)]_{B'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1/4\\ 0 & 1/4\end{bmatrix}.$$

Regner ut $T(-1+x-4x^2)$ ved å bruke matrisa funnet over:

$$\begin{aligned}[T(-1+x-4x^2)]_{B'} &= [T]_{B',B}[-1+x-4x^2]_B\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1/4\\ 0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dette er en koordinatvektor med basisen B', så da er $T(-1+x-4x^2) = -2(1-x^2)-1(-1+5x^2+4x^3) = -1-3x^2-4x^3$. Som kontroll ser vi at dette polynomet ligger i billedmengden til T.

Oppgave 4 La A være en kompleks skjev-hermitsk matrise. Matrisa kalles skjev-hermitsk hvis $A^* = -A$, der A^* er den konjugert-transponerte ($A^* = \bar{A}^T$).

a) Vis at iA er Hermitsk, der $i = \sqrt{-1}$.

En matrise er hermitsk hvis $A^* = A$.

$$(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA^* = i(-A^*) = iA,$$

der det at A er skjev-hermitsk benyttes ved siste likhetstegn.

b) Vis at A er unitært diagonaliserbar.

En kompleks matrise A er unitært diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal, det vil si at $AA^* = A^*A$. Og siden

$$AA^* = A(-A) = (-A)A = A^*A,$$

er A unitært diagonaliserbar.