Oppgave 1

a) $\vec{x}+\vec{y} = \vec{x}+\vec{z}$

ifølge (VS4): fins $\vec{w}$ s.a. $\vec{x}+\vec{w} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{x}+\vec{y})+\vec{w} = (\vec{x}+\vec{z})+\vec{w}$

$\overset{VS1}{\Rightarrow} (\vec{y}+\vec{x})+\vec{w} = (\vec{z}+\vec{x})+\vec{w}$

$\overset{VS2}{\Rightarrow} \vec{y}+\underbrace{(\vec{x}+\vec{w})}_{\vec{0}} = \vec{z}+\underbrace{(\vec{x}+\vec{w})}_{\vec{0}}$

$\overset{VS3}{\Rightarrow} \vec{y} = \vec{z}$

b) $\vec{x}+\vec{x} = \vec{x}$

og, ifølge VS3: $\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}$

så $\vec{x}+\vec{x} = \vec{x}+\vec{0}$

$\overset{a)}{\Rightarrow} \vec{x} = \vec{0}$

Oppgave 2

a) $$\left.\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D(x) &= 1 \\ D(x^2) &= 2x \end{aligned}\right\} \quad [D]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} S(1) &= x^2 \\ S(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 \\ S(x^2) &= \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}\right\} \quad [S]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$T = D + S$, og derfor

$$[T]_\beta = [D]_\beta + [S_\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b) T isomorfi $\iff$ $[T]_\beta$ inverterbar,

og dette er sant fordi

$\det [T]_\beta = 2 \neq 0$

$$[T^{-1}]_\beta = [T]_\beta^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

Dette er en Markovkjede med overgangsmatrise

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

som er regulær.

$\Rightarrow$ Uansett $\vec{x}$, så er $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \vec{x}$

gitt som egenvektor til egenverdi 1

$$E_A(1) = N\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = \text{Span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A^n \vec{x} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(må være sannsynlighetsvektor)

På lang sikt spiser 67 % på A.

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) det karakteristiske polynomet er

$$p(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ -5 & -4-t & 3 \\ -3 & -3 & 2-t \end{bmatrix}$$

$$= (2-t)(-4-t)(2-t) + 1 \cdot 3 \cdot (-3)$$
$$+ (-5)(-3)(-1) - (2-t)(-3)\,3$$
$$- (-3)(-4-t)(-1) - (-5)\,1\,(2-t)$$
$$= -t^3 + 12t - 16 - 9 - 15$$
$$+ 18 - 9t + 12 + 3t + 10 - 5t$$
$$= -t^3 + t$$

$\rightsquigarrow$ egenverdier $0, 1, -1$

b) 3 forskjellige egenverdier

$\Rightarrow$ får 3 lineær uavhengige egenvektorer

Men rommet er 3-dimensjonalt, så dette er en basis av egenvektorer

$\Rightarrow$ A er diagonaliserbar

c) Vi må undersøke om AA^* er lik A^*A.

(Siden A er reell så er $A^* = A^T$.)

$$AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -17 & -11 \\ -17 & 50 & 33 \\ -11 & 33 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 & 31 & -23 \\ 31 & 26 & -19 \\ -23 & -19 & 14 \end{bmatrix}$$

de er ulike, og dermed er A ikke normal
(det holder faktisk å regne ut en plass for å se at de er ulike.)

d) Vi vet at unitær diagonaliserbar er ekvivalent med normal.
Derfor er A ikke unitær diagonaliserbar.

Oppgave 5.

(a) $\Rightarrow$ (b)

La $\vec{v} \in E_T(\lambda)^\perp$.

Da er altså $P(\vec{v}) = \vec{0}$

Siden $TP = PT$, så er

$$PT(\vec{v}) = TP(\vec{v}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

og derfor $T(\vec{v}) \in \operatorname{Ker} P = E_T(\lambda)^\perp$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

La $\vec{v}$ være en vilkårlig vektor i V.

Vi skriv $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$

med $\vec{x} \in E_T(\lambda)$ og $\vec{y} \in E_T(\lambda)^\perp$.

(Det er mulig fordi V er endelig dim.)

$$TP(\vec{v}) = \underbrace{T\underbrace{P(\vec{x})}_{=\vec{x}}}_{=\lambda\vec{x}} + \underbrace{T\underbrace{P(\vec{y})}_{=\vec{0}}}_{=\vec{0}}$$

$$= \lambda\vec{x}$$

$$PT(\vec{v}) = \underbrace{P\underbrace{T(\vec{x})}_{=\lambda\vec{x}}}_{=\lambda\vec{x}} + \underbrace{P\underbrace{T(\vec{y})}_{\in E_T(\lambda)^{\perp} \text{ ifølge b)}}}_{=\vec{0}}$$

$$= \lambda\vec{x}$$

Så PT og TP stemmer overens på alle vektorer $\vec{v}$.
Dermed er $PT = TP$