NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Steffen Oppermann

Tlf: 9189 7712

Eksamensdato: 01. juni 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Foreleseren skal komme til eksamenslokalet ca. klokken 10 og ca. klokken 12, for eventuelle spørsmål. Tida kan variere litt i tilfelle det er eksamen på forskjellige rom. (Gjelder ikke studenter i MA6202 som tar eksamen utenfor NTNU Trondheim.)

Alle oppgaver teller likt. Innenfor hver oppgave teller alle deloppgaver likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La V være et vektorrom. Vis, ved å bare bruke vektorrom-aksiomene (se vedlegg):

a) Hvis $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$ for noen $\vec{x},\vec{y}$ og $\vec{z}$ i V, så er $\vec{y}=\vec{z}$.

b) Hvis $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ for en $\vec{x}$ i V, så er $\vec{x}=\vec{0}$.

Oppgave 2 La $V=\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet av reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Betrakt følgende lineærtransformasjoner fra V til V (du trenger ikke vise at de er lineære):

$$
\begin{aligned}
D\colon V \to V : p(x) &\mapsto p'(x) \qquad \text{(derivasjon)}\\
S\colon V \to V : p(x) &\mapsto \int_0^1 p(t)dt\, x^2\\
T\colon V \to V : p(x) &\mapsto p'(x) + \int_0^1 p(t)dt\, x^2
\end{aligned}
$$

La β være den ordnede basisen $\{1, x, x^2\}$.

a) Finn $[D]_\beta$, $[S]_\beta$ og $[T]_\beta$.

b) Vis at T er en isomorfi. Finn $[T^{-1}]_\beta$.

Oppgave 3 En liten by har to restauranter, A og B. Til enhver tid vil 75% av gjestene som sist spiste på A også spise der neste gang de spiser ute, mens 25% av dem spiser på B neste gang. Av gjestene som sist spiste på B, spiser 50% på A neste gang, mens 50% spiser på B igjen.

Hvor mange prosent av gjestene spiser på restaurant A på lang sikt?

Oppgave 4 Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn alle egenverdiene til A. (Du trenger ikke å finne egenvektorer.)

b) Er A diagonaliserbar?

c) Er A normal?

d) Er A unitært diagonaliserbar?

Oppgave 5 La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, og $T\colon V \to V$ en lineærtransformasjon. La λ være en skalar, og la P være den ortogonale projeksjonen på egenrommet $E_T(\lambda)$. Vis at følgende to utsagn er ekvivalente:

(a) $TP = PT$;

(b) For hver vektor $\vec{v} \in E_T(\lambda)^{\perp}$ ligger også bildet $T(\vec{v})$ i $E_T(\lambda)^{\perp}$.

Vedlegg

Definisjon. Et *vektorrom* V over en kropp $\mathbb{K}$ er en mengde som det er definert to operasjoner på: *vektoraddisjon*, som definerer for to elementer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ av V et nytt element $\vec{x} + \vec{y}$, og *skalarmultiplikasjon*, som definerer for $s \in \mathbb{K}$ og et element $\vec{x} \in V$ et nytt element $s\vec{x} \in V$, slik at følgende krav er oppfylt:

(VS1) For alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gjelder $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

(VS2) For alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ gjelder $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

(VS3) Det fins et element $\vec{0}$ i V slik at $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in V$.

(VS4) For hvert element $\vec{x} \in V$ fins det et element $\vec{y} \in V$ slik at $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.

(VS5) For hvert element $\vec{x} \in V$ gjelder $1\vec{x} = \vec{x}$.

(VS6) For hvert par av skalarer s og t i $\mathbb{K}$ og hver $\vec{x} \in V$ gjelder $(st)\vec{x} = s(t\vec{x})$.

(VS7) For hver $s \in \mathbb{K}$ og $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gjelder $s(\vec{x} + \vec{y}) = s\vec{x} + s\vec{y}$.

(VS8) For hver $s, t \in \mathbb{K}$ og $\vec{x} \in V$ gjelder $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$.