# Notater for forelesning 15/11

Vi begynner i dag på den siste delen av pensum, nemlig likninger av høyere grad (enn 1). I dag skal vi se spesielt på *Pythagoras'* setning, og pythagoreiske tripler. Jeg minner først om det klassiske resultatet om trekanter:

**Teorem 0.1** (Pythagoras)**.** *I en rettvinklet trekant er summen av kvadratene på katetetene lik kvadratet på hypotenusen.*

Hvis katetene har lengde $a$ og $b$, og hypotenusen har lengde $c$, har vi altså at $a^2 + b^2 = c^2$. Vi er interessert i heltall som tilfredsstiller dette (f.eks. $a = 3, b = 4, c = 5$).

**Definisjon 0.2** (Pythagoreisk trippel)**.** Tre heltall $x, y, z$ som tilfredsstiller $x^2 + y^2 = z^2$ kalles et *pythagoreisk trippel.* Om vi i tillegg har $gcd(x, y, z) = 1$ kalles det *primitivt.*

Om det finnes en felles faktor, kan vi dele på (kvadratet til) den, og fortsatt ha den samme relasjonen. Omvendt kan vi, fra et gitt trippel, lage uendelig mange flere ved å gange med det samme tallet i hver variabel. Det er derfor klart at klassifiseringen av pythagoreiske tripler vil være komplett dersom vi kan klassifisere primitive tripler. Siden likningen er symmetrisk i $x$ og $y$, og nøyaktig ett av disse må være et partall (i et primitivt trippel), kan vi anta at $x$ er et partall, $y$ et oddetall.

Målet med dagens forelesning er å vise dette resultatet:

**Teorem 0.3.** *Alle de positive heltallsløsningene til likningen*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

*der* $gcd(x, y, z) = 1$ *og* $2|x$ *er gitt ved formlene*

$$x = 2st,\ y = s^2 - t^2,\ z = s^2 + t^2$$

*for heltall* $s > t > 0$ *slik at* $gcd(s, t) = 1$ *og* $s \not\equiv t\,(mod\,2)$.

For å presisere: alle løsninger har denne formen, og alle tripler på denne formen er primitive pythagoreiske tripler.

Beviset er en eksplisitt utregning, og inkluderer ikke noen ny tankegang for oss nå.

Om vi får tid, vil vi også se på et morsomt geometrisk resultat, nemlig at om sidene i en rettvinklet trekant er heltall, så er også radien til den innskrevne sirkelen et heltall.

Jon Eivind Vatne