Notater for forelesning 18/11

Sist så vi på likningen $x^2 + y^2 = z^2$. I dag skal vi se på likningen der eksponenten endres til n, for et vilkårlig heltall $n \geq 2$. Det store resultatet her er

Teorem 0.1 (Wiles-Fermat)**.** *La $n \geq 3$ være et heltall. Likningen*

$$x^n + y^n = z^n$$

har ingen positive heltallsløsninger.

Dette resultatet, som ble bevist av Wiles på 90-tallet, er altfor omfattende til at vi kan bevise det i kurset vårt. Men vi kan vise spesialtilfellet $n = 4$, og vårt resonnement vil da følge boken tett. Vi vil fokusere på likningen $x^4 + y^4 = z^2$, og prøve å forstå grundig hvorfor denne ikke har løsning. Samme resonnement gir at $x^4 - y^4 = z^2$ ikke har løsning, dette går vi ikke gjennom.

Det er klart at $x = 0, y = z$ gir en løsning, og om n er odde, kan vi ta $z = 0, x = -y$. Men i positive tall finnes det ingen løsninger, heller ikke om alle tre tallene er ulik null. For $n = 2$ er likningen Pytagoras' likning, og vi har sett at den har veldig mange løsninger.

Fra tankegangen rundt disse likningene, gir vi et enkelt geometrisk resultat. Om vi har en rettvinklet trekant hvis kanter har heltallig lengde (altså a, b, c slik at $a^2 + b^2 = c^2$), så kan ikke arealet av trekanten være et kvadrat.

Jon Eivind Vatne