Notater om binomialteoremet

Fakultetsoperasjonen, !, er definert for positive heltall ved

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\cdots 4.3.2.1$$

Per konvensjon er også $0! = 1$. Vi har følgende tabell for lave verdier:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Vi definerer binomialkoeffisientene ved hjelp av denne operasjonen. For $0 \leq k \leq n$ definerer vi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Hvis vi skriver ut definisjonen, kan vi forkorte enten $k!$ eller $(n-k)!$ oppe og nede:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots 3.2.1}{k(k-1)\cdots 3.2.1(n-k)(n-k-1)\cdots 3.2.1} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3.2.1} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k(k-1)\cdots 3.2.1}\end{aligned}$$

Noen eksempler (kontroller utregningene selv!):

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,\ \binom{4}{2} = 6,\ \binom{8}{5} = 56,\ \binom{10}{3} = 120$$

Vi har er resultat for å beregne binomialkoeffisientene på bakgrunn av de foregående (*lemma* betyr hjelpesetning):

Lemma 0.1. *La $1 \leq k \leq n$. Da er*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Beviset står i boken, side 8-9, og blir gjennomgått på forelesning. Dette resultatet gjør at vi kan koble binomialkoeffisientene sammen med Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Her er altså regelen at vi starter med å plassere enere langs kanten, og hvert indre tall er summen av de to tallene rett over. Tallene i en gitt rekke er binomialkoeffisientene med en gitt n, f.eks. er rekken $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$ lik binomialkoeffisientene $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \cdots, \binom{6}{6}$.

Vi kan også bruke lemmaet som grunnlag for å bevise binomialteoremet:

Teorem 0.2 (Binomialteoremet)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Beviset står godt forklart i boken, og blir gjennomgått på forelesning. Men legg spesielt merke til at beviset foregår ved induksjon. Starten på induksjonen er lett ($(a+b)^1 = a+b$), induksjonsantagelsen blir brukt to ganger, og vi bruker lemmaet for å koble sammen de to delene av mellomregningen.

For de interesserte vil jeg avslutte med et par eksempler på bruk av binomialkoeffisienter fra andre deler av matematikken. Disse eksemplene er ikke så viktige i vårt kurs, men det kan være greit å kjenne til. Dette stoffet vil jeg ikke gå gjennom på forelesning, og er altså **ikke en del av pensum**.

La f og g være funksjoner som kan deriveres vilkårlig mange ganger. Regelen for derivasjon av et produkt sier

$$\frac{d}{dx} fg = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}$$

Deriver begge sider en gang til, og bruk produktregelen to ganger på høyre side. Da får vi

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dx^2} fg &= \tfrac{d}{dx}(\tfrac{df}{dx} g) + \tfrac{d}{dx}(f \tfrac{dg}{dx}) \\ &= \tfrac{d^2 f}{dx^2} g + \tfrac{df}{dx}\tfrac{dg}{dx} + \tfrac{df}{dx}\tfrac{dg}{dx} + f \tfrac{d^2 g}{dx^2} \\ &= \tfrac{d^2 f}{dx^2} g + 2\tfrac{df}{dx}\tfrac{dg}{dx} + f \tfrac{d^2 g}{dx^2} \end{aligned}$$

Generelt gjelder det at

$$\frac{d^n}{dx^n} fg = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k} f}{dx^{n-k}} \frac{d^k g}{dx^k}$$

Denne formelen kan bevises ved hjelp av induksjon og lemmaet vårt om binomialkoeffisienter. De som er interessert i å prøve seg på induksjon i en analytisk sammenheng kan jo skrive ut beviset!

Den viktigste kombinatoriske tolkningen av binomialkoeffisienter er via *utvalg*. Her er utsagnet:

$$\binom{n}{k} = \text{antall måter å velge } k \text{ objekter blant } n$$

For eksempel er $\binom{5}{3} = 10$, og de ti måtene og velge tre objekter blant fem på er (med de fem objektene lik a, b, c, d, e)

$$\begin{array}{c} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{array}$$

Denne beskrivelsen gir nye tolkninger av mange av våre utregninger om binomialkoeffisienter. La meg bare nevne noen av de enkleste: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Det er bare *en* måte å velge null objekter på, nemlig ikke å velge noen. Tilsvarende er det bare en måte å velge alle objektene på. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Hvis du har åtte bøker, og vil ha med tre på tur, er det $\binom{8}{3}$ muligheter for å velge ut disse bøkene. Men du kan like gjerne velge de fem bøkene som blir stående igjen i hyllen. De som fordyper seg i diskret matematikk vil lære mye mer om denne typen resonnementer.

Jon Eivind Vatne