Notater for forelesning 13/9

På dagens forelesning skal vi snakke litt om valget, og beregningen av mandatfordelingen. Siden dette ikke akkurat er pensum, blir det ikke med i notatene. Derimot skal vi begynne å se på *lineære diofantiske ligninger*, som er et viktig punkt i kurset.

En ligning på formen

$$ax + by = c$$

der a, b og c er hele tall, og x og y er ukjente, kalles en *lineær diofantisk ligning* (i to variable). En *løsning* av en slik ligning består av to hele tall x_0 og y_0 slik at $ax_0 + by_0 = c$. For eksempel er $2x + 3y = 32$ en diofantisk ligning, og siden $2.10+3.4 = 32$ er $(x, y) = (10, 4)$ en løsning. Om vi først finner en løsning, er det alltid uendelig mange løsninger. For eksempel er $2.13+3.2 = 32$ en annen løsning på forrige ligning. Ligningene trenger ikke ha løsning, for eksempel er ligningen $2x + 4y = 3$ uten løsninger, siden venstresiden er et partall for alle valg av x og y.

Det generelle utsagnet om slike ligninger er

Teorem 0.1 (Lineære diofantiske ligninger)**.** *La $ax+by = c$ være en lineær diofantisk ligning i to variable, og la $d = gcd(a, b)$ være den største felles divisoren til a og b. Da har ligningen en løsning hvis og bare hvis $d|c$. Om x_0, y_0 er en gitt løsning, vil alle løsningene være gitt ved*

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \ \ y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

der t er et vilkårlig heltall.

Neste gang skal vi se på beviset, og gi en rekke eksempler på hva dette hjelper oss med å regne ut.

I formuleringen ser det ut som om det er en asymmetri mellom x og y, siden vi legger til noe for å få x fra x_0, mens vi trekker fra noe for å få y. Dette skyldes selvsagt at parameteren t er et vilkårlig heltall, og kan være både positivt og negativt.

Hvis vi ser tilbake til våre eksempler, ser vi at den generelle løsningen til $2x+3y = 32$ er $x = 10 + 3t, y = 4 - 2t$. Her er $d = 1$. Og i ligningen $2x + 4y = 3$ har vi ingen løsning, siden $d = 2$ ikke deler 3. For et eksempel som illustrerer hva som skjer når $d > 1$, se på ligningen $6x + 9y = 15$. Da er $d = 3$, $d|15$ og vi ser en løsning ved $x = y = 1$. Da er den generelle løsningen $x = 1 + 3t, \ y = 1 - 2t$, siden $9/3 = 3$ og $6/3 = 2$.

Jon Eivind Vatne