# Notater for forelesning 16/9

Vi ser på lineære diofantiske ligninger

$$ax + by = c$$

der $a, b$ og $c$ er hele tall, og vi er interessert i heltallsløsninger. Vi formulerte det viktigste resultatet på forrige forelesning:

**Teorem 0.1** (Lineære diofantiske ligninger)**.** *La $ax+by = c$ være en lineær diofantisk ligning i to variable, og la $d = gcd(a, b)$ være den største felles divisoren til $a$ og $b$. Da har ligningen en løsning hvis og bare hvis $d|c$. Om $x_0, y_0$ er en gitt løsning, vil alle løsningene være gitt ved*

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \ y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

*der $t$ er et vilkårlig heltall.*

Beviset står godt forklart i boken, side 34-35, og blir gjennomgått på forelesning. I den praktiske gjennomføringen av å løse en lineær diofantisk ligning, inngår Euklids algoritme. Ta følgende eksempel:

Finn alle heltall $x, y$ slik at $207x + 42y = -6$.

Euklids algoritme:

$$207 = 4.42 + 39$$
$$42 = 1.39 + 3$$
$$39 = 13.3 + 0$$

Siden $3|(-6)$ vet vi nå at det finnes løsninger. Da løser vi først hjelpeligningen $ax + by = gcd(a, b)$, ved å gå baklenggs gjennom Euklids algoritme:

$$3 = 42 - 1.39 = 42 - (207 - 4.42) = 5.42 - 1.207$$

Så ganger vi opp får å få $-6$, ikke 3, på venstre side (vi ganger altså med $-2$):

$$-6 = 2.207 - 10.42$$

Altså er *en* løsning gitt ved $x_0 = 2$, $y_0 = -10$, og den generelle løsningen er $(42/3 = 14, \ 207/3 = 69)$

$$x = 2 + 14t, \ y = -10 - 69t.$$

La oss for ordens skyld sette prøve på svaret:

$$207x + 42y = 207(2 + 14t) + 42(-10 - 69t) = 414 + 2898t - 420 - 2898t = -6$$

som ønsket.

Denne typen ligninger er veldig vanlig i forskjellige klassiske og moderne pusleoppgaver. Et eksempel er såkalte *frimerkeproblemer*, som vi kan gi et eksempel på nå:

Du har 15 frimerker av valør 4 kroner og 20 frimerker av valør 7 kroner, og ønsker å frankere et brev som skal ha 80 kroner porto. Hvordan kan dette gjøres?

Her blir en lineær diofantisk ligning $4x + 7y = 80$, der $x$ er antall 4-kroners merker og $y$ er antall 7-kroners merker, kombinert med ulikheter $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 20$. Vi løser først ligningen, ved å gå frem som over ($7 = 1.4 + 3, 4 = 1.3 + 1$ så $gcd(7, 4) = 1$, og $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2.4 - 1.7$, gang med 80 og vi får til slutt)

$$x_0 = 160,\ y_0 = -80,\ \ x = 160 + 7t, y = -80 - 4t$$

Så må vi bruke ulikhetene til å finne ut hvilke verdier av $t$, om noen, som løser problemet. La oss først sikre at vi får et positivt antall av hvert frimerke:

$$\begin{array}{lll} 0 \leq x = 160 + 7t & -7t \leq 160 & t \geq -160/7 = -23 + 1/7 \\ 0 \leq y = -80 - 4t & 4t \leq -80 & t \leq -20 \end{array}$$

Fra dette får vi mulighetene $t = -20, -21, -22$. Det gir henholdsvis $x = 20, 13, 6$ og $y = 0, 4, 8$. Den første av disse mulighetene krever 20 merker av valør 4, men vi har bare 15, så den må utelates. Vi får altså to løsninger: 13 merker av valør 4 og 4 av valør 7 ($13.4 + 4.7 = 52 + 28 = 80$), 6 merker av valør 4 og 8 av valør 7 ($6.4 + 8.7 = 24 + 56 = 80$).

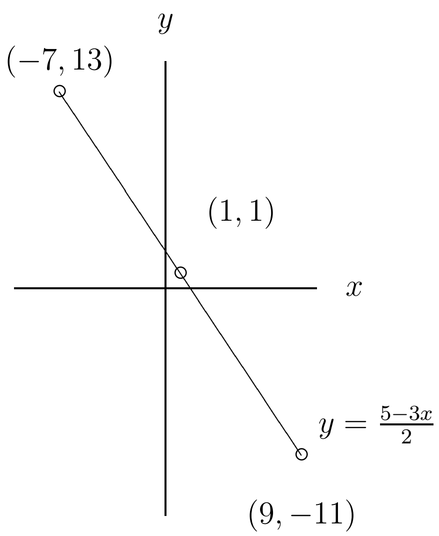
**Geometrisk tolkning av lineære diofantiske ligninger.**

Jeg vil nå prøve å forklare hva disse ligningene betyr geometrisk. Det er ikke egentlig med i vårt pensum, men vil for de som er vant til å regne med linjer, kunne være klargjørende.

En ligning $ax + by = c$ kan omformes til (anta $b \neq 0$)

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

Her kan vi betrakte høyresiden som en funksjon av $x$, og vi kan tegne grafen til denne funksjonen på vanlig måte. F.eks. kan vi ta $3x + 2y = 5$, den omformes da til $y = (5 - 3x)/2$. Grafen ser slik ut:




En parameterframstilling av kurven er gitt ved $x = 1 + 2t, y = 1 - 3t$. På figuren er det markert tre punkter, nemlig for $t = -4, 0, 4$. Det vi gjør når vi regner på lineære diofantiske ligninger, er å finne slike parameterframstillinger med heltallige koeffisienter, med den ekstra egenskapen at heltallspunktene på linjen er nøyaktig de punktene som kommer fra heltallsverdier for parameteren.

Om ligningen ikke har løsning, betyr det at den tilhørende linjen ikke går gjennom noe punkt der begge koordinatene er heltall. Om ligningen har løsning, er de uendelig mange løsningene gitt ved alle punktene på linjen med heltallskoordinater.

Jon Eivind Vatne