Notater for forelesning 2/9

Til å begynne med ser vi over beviset for binomialteoremet igjen. Vi definerte binomialkoeffisientene ved

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

For å bevise binomialteoremet trengte vi en hjelpesetning, som sa at

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Da var selvet teoremet

Teorem 0.1 (Binomialteoremet)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Hvis vi ekspanderer summen står det

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

La oss skrive ut beviset:

Vi bruker induksjon, så først må vi sjekke utsagnet for $n = 1$. Da må vi vise at

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

Vi ekspanderer summen, og bruker at $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

og vi ser at utsagnet er riktig for $n = 1$.

Neste skritt er å anta at utsagnet holder for $n = m$, altså at

(1)
$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \cdots \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

Vi vil bruke dette til å vise at utsagnet holder for $n = m + 1$, altså at

(2)

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}b^k = \binom{m+1}{0}a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m b + \cdots \binom{m+1}{m+1}b^{m+1}$$

Først:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = a(a+b)^m + b(a+b)^m$$

De to leddene på høyre side kan vi beregne ved induksjonsantagelsen, som nettopp sier hva $(a+b)^m$ er. Altså:

$$a(a+b)^m = a\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}b^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k}b^k$$

Ekspandert står det

$$a(a+b)^m = \binom{m}{0}a^{m+1} + \binom{m}{1}a^m b + \binom{m}{2}a^{m-1}b^2 + \cdots \binom{m}{m-1}a^2 b^{m-1} + \binom{m}{m}ab^m$$

For å få leddet med b først på en god form, må vi også trikse litt med summasjonsindeksen, så vi innfører midlertidig j som summasjonsindeks:

$$b(a+b)^m = b\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j}b^j = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j}b^{j+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k}b^k$$

Her har vi satt $k = j+1$, og brukt at når j er $0, m$ blir $k = 1, m+1$ henholdsvis. I tillegg er $m - j = m - (k-1) = m + 1 - k$. Hvis vi ekspanderer summen får vi (uansett om vi bruker j eller k)

$$b(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m b + \binom{m}{1}a^{m-1}b^2 + \cdots \binom{m}{m-1}ab^m + \binom{m}{m}b^{m+1}$$

Uttrykket for leddet som begynner med a har leddet $\binom{m}{0}a^{m+1} = a^{m+1}$, og tilsvarende finner vi $\binom{m}{m}b^{m+1} = b^{m+1}$. Hvis vi trekker disse to leddene ut av summene, men beholder resten, får vi

$$\begin{array}{llll} a(a+b)^m + b(a+b)^m & = a^{m+1} + & \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k}b^k & \\ & + & \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k}b^k & + b^{m+1} \\ = & a^{m+1} + & \sum_{k=1}^{m} (\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}) a^{m+1-k}b^k & + b^{m+1} \\ = & a^{m+1} + & \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}b^k & + b^{m+1} \end{array}$$

Her brukte vi lemmaet i siste overgang. Merk at leddene på endene passer i summen (henholdsvis med $k = 0$ og $k = m+1$), og vi får til slutt

$$a(a+b)^m + b(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}b^k$$

som var det vi ønsket å bevise!

Prøv selv å skrive ut den siste utregningen med ekspandert summasjon!

Neste tema: divisjon. Vi vet fra før at vi kan dele tall på hverandre (bortsett fra at vi ikke kan dele tall på null). En måte å formalisere dette utsagnet på er å formulere divisjonsteoremet:

Teorem 0.2 (Divisjon)**.** *La a og b være heltall med $b \geq 1$. Da finnes entydig bestemte heltall q og r, med $0 \leq r < b$, slik at*

$$a = bq + r$$

Dette står bevist i boken (side 17-18). Egentlig forteller teoremet oss bare at det vi har gjort i årevis er riktig! Vi sier at a er delelig med b om resten er null, for det betyr jo at $\frac{a}{b} = q$ er et heltall. Merk at vi skriver divisjonen annerledes enn det dere kanskje er vant til, men $a = bq + r$ er jo ekvivalent med $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

Hvordan kan denne presise formuleringen gi oss en større innsikt i heltallene? Et eksempel er resultatet som ble nevnt i første forelesning, nemlig at om vi tar et tall som ikke er delelig med 5, og opphøyer det i fjerde, og så deler på 5, vil vi få rest 1. Ved teoremet vet vi at et tall som ikke er delelig med 5 må være på en av formene $5q + 1, 5q + 2, 5q + 3, 5q + 4$. Når disse skal opphøyes i fjerde får vi henholdsvis (det siste alternativet, $5q + 4$, overlater jeg til dere)

$$\begin{aligned}(5q+1)^4 &= 5^4q^4 + 4.5^3q^3 + 6.5^2q^2 + 4.5q + 1\\ (5q+2)^4 &= 5^4q^4 + 4.5^3q^3.2 + 6.5^2q^2 2^2 + 4.5q2^3 + 2^4\\ (5q+3)^4 &= 5^4q^4 + 4.5^3q^3.3 + 6.5^2q^2 3^2 + 4.5q3^3 + 3^4\end{aligned}$$

Alle leddene bortsett fra det siste i hver linje kan deles på fem. I første linje får vi umiddelbart rest 1. I andre linje er det siste leddet $2^4 = 16 = 5.3 + 1$, så vi får rest 1 igjen. I tredje linje er det siste leddet $3^4 = 81 = 5.16 + 1$, og resten er 1.

Vi vil være interessert i å dividere flere tall om gangen, det første skrittet i denne retning er å definere *største felles divisor*. Så om a og b er hele tall, med minst en av dem ulik null, sier vi at det største tallet r som både a og b er delelig med, er deres største felles divisor. På engelsk heter det greatest common divisor, og vi forkorter det *gcd*. Eksempel:

$$gcd(12, 18) = 6,\ gcd(5, 3) = 1,\ gcd(0, 1034) = 1034,\ gcd(-4, -6) = 2$$

I neste uke skal vi se nærmere på dette, introdusere litt notasjon for det, og vise hvordan *gcd* kan beregnes (Euklids algoritme).

Jon Eivind Vatne