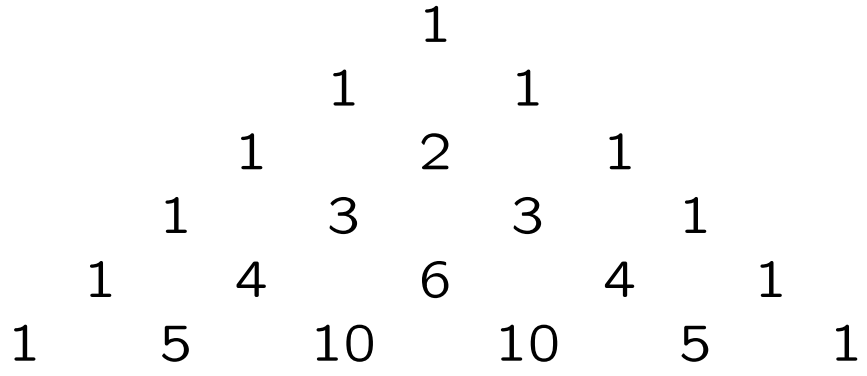
Pascals trekant og binomialteoremet



$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$
$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 +$
$+5ab^4 + b^5$

Generelt har vi (binomialteoremet)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$$

Divisjon, gcd, lcm

$$1293 : 11 = 117 + \frac{6}{11}$$

```
11
 193
 11
  83
  77
   6
```

Når vi deler 1293 på 11 får vi *kvotient* 117 og *rest* 6. Selve divisjonsprosessen fortsetter til vi får en rest som er mindre enn 11.

$$\frac{4}{6} = \frac{2.2}{3.2} = \frac{2}{3}$$

Når vi forkorter brøk, beregner vi *største felles divisor*. På engelsk er det greatest common divisor, forkortet gcd. Altså: $gcd(4, 6) = 2$.

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$$

Når vi adderer brøk, beregner vi *minste felles multiplum*. På engelsk er det least common multiple, forkortet lcm. Altså: $lcm(4,6) = 12$.

$$4.6 = 2.12 = gcd(4,6)lcm(4,6)(= 24)$$

Vi har alltid at produktet av to tall er produktet av gcd og lcm. Det er derfor "nok" å beregne den ene, som oftest bruker vi gcd. Denne kan vi finne ved å faktorisere tallene (slik vi gjorde ovenfor for 4 og 6), men det er tungvint. Euklids algoritme gir en rask fremgangsmåte for å beregne gcd, bare ved hjelp av divisjon.

Kan vi løse $4x + 6y = 3$ i heltall x og y?

Siden $4x$ alltid er partall og $6y$ alltid er partall, er også $4x + 6y$ partall. Men 3 er et oddetall, derfor kan likningen ikke løses. Men f.eks. $4x + 6y = -2$ kan løses, og det på mange måter:

$$-2 = 4.1+6.(-1) = 4.4+6.(-3) = 4.(-2)+6.1$$

Løsning av slike likninger, kalt *lineære diofantiske likninger*, er nært forbundet med divisjon, og ved hjelp av Euklids algoritme kan man bestemme om løsning finnes, og i så fall kan alle løsningene gis.

Primtall, multiplikative byggesteiner

Fra antikken har det vært kjent at alle heltall kan skrives som et produkt av primtall, og det på en entydig måte. Et *primtall* er et heltall større enn 1 som bare kan deles på seg selv og på 1.
Det finnes uendelig mange primtall (nydelig bevis av Euklid). De fordeler seg utover blant heltallene på en "merkelig" måte. Finnes det uendelig mange primtall på formen $4n + 1$, $5n + 12$, $3n + 6$? Mengden av tall på en slik form kalles en *aritmetisk følge*.

De første primtallene er $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Finnes det en begrensning på hvor stort det tiende primtallet er? Det millionte?

Operasjoner og divisjon

I kapitlene 4,5,7 og 8 i læreboken skal vi undersøke nærmere hva som skjer når vi ganger sammen tall, eller legger sammen tall, før vi deler på et annet tall. F.eks. sier Fermats teorem (i spesialtilfellet $p = 5$) at hvis du tar et tall som ikke kan deles på 5, for eksempel 24, opphøyer det i fjerde, og så deler resultatet på 5, får du rest 1:

$$24^4 = 331776 = 66355.5 + 1$$

Resultatene vi finner forklarer flere fenomener vi støter på i dagliglivet. For eksempel, gang tallene i et ISBN-nummer (x betyr 10) med 1,2,...,10, og del på elleve. Da blir resten alltid null!

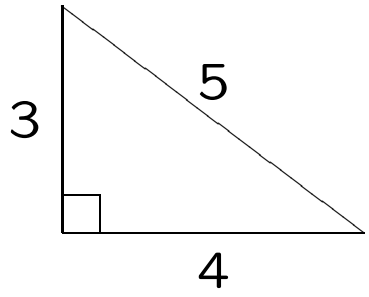
$$1.0 + 2.0 + 3.7 + 4.1 + 5.2 + 6.4 + 7.3 + 8.2 + 9.5 + 10.9$$
$$= 21 + 4 + 10 + 24 + 21 + 16 + 45 + 90 = 231 = 21.11$$

Tilsvarende får vi forklart de norske personnumrene.

En annen anvendelse er såkalt RSA-kryptografi. Det vil vi se på i et eget notat.

Pythagoras, Wiles-Fermat

Til slutt skal vi se på likninger av høyere grad, for eksempel *Pythagoras-likningen* $x^2 + y^2 = z^2$. Et eksempel på en heltallsløsning er $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.



Vi finner alle heltallsløsningene til denne likningen.

Wiles-Fermat-teoremet sier at likningen

$$x^n + y^n = z^n$$

ikke har noen heltallsløsninger ulik null for $n \geq 3$. Vi skal bevise dette for $n = 4$, og også se på noen andre likninger av samme type.

Det er mange enkle spørsmål om hele tall vi ikke kjenner svaret på. Og jo flere svar vi finner, jo flere nye spørsmål vil dukke opp! Om noen måneder vil dere vite langt mer om tall enn dere vet i dag (forhåpentligvis jeg også). Inntil videre kan dere kose dere med det største kjente primtallet:

$$2^{25964951} - 1$$

Dette er et tall med 7816230 sifre!

Kursets hjemmeside:
www.math.ntnu.no/emner/MA1301/2005h/

Jon Eivind Vatne, joneivv@math.ntnu.no