Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i MA1301 - Tallteori

Onsdag 1. oktober 2008
Tid: 10.15 - 12:00
Hjelpemidler: Typegodkjent Kalkulator

Oppgave 1 Hvor mange ganger forekommer faktoren 3 i primtallsfaktoriseringen

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{?} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdots 97^{1} \ ?$$

Oppgave 2 Bruk matematisk induksjon til å vise at

$$2^n \geq n^2 \quad (n = 4, 5, 6, 7, \cdots)$$

(Begynn på $n = 4$).

Oppgave 3 Løs den diophantiske ligningen

$$233x + 144y = 1.$$

Gi deretter alle løsninger til kongurensen

$$233x \equiv 1 (\mathrm{mod} 144).$$

Oppgave 4 Bevis at det finnes uendelig mange primtall på formen $4n + 3$.

$$\textbf{Hint:}\ 4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdots p_n + 3.$$

ENGLISH VERSION

Oppgave 5 How many times does the factor 3 appear in the factorization

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{?} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdots 97^{1} \text{ ?}$$

Oppgave 6 Prove that $2^n \geq n^2 \ \ (n = 4, 5, 6, 7, \cdots)$ using mathematical induction. (Start at $n = 4$).

Oppgave 7 Solve the Diophantine equation

$$233x + 144y = 1$$

Then give all solutions of the congruence

$$233x \equiv 1(\text{mod} 144).$$

Oppgave 8 Prove that there are infinitely many prime numbers of the type $4n + 3$.

Hint: $4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdots p_n + 3.$