Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Peter Lindqvist, telefon 73593529

Eksamen i MA1301 Tallteori

Bokmål
Fredag 30. november 2007
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kode D: Kalkulator HP30S

Sensur: Fredag 21. desember 2007

Oppgave 1 Bevis at tallet $\sqrt[3]{7}$ er irrasjonalt, dvs. at ligningen

$$7m^3 = n^3$$

ikke har løsninger i naturlige tall n, m.

Oppgave 2 Løs systemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 6 \\ x &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

Gi alle heltallige løsninger.

Oppgave 3 Man vet at $n = 57482 = 2 \cdot p \cdot q$, der p og q er to ulike primtall, og $\varphi(n) = 28000$, der φ er Eulers φ-funksjon. Finn faktorene p og q.

Oppgave 4 Finn restene modulo 101:

$$100! \equiv ? \pmod{101}, \quad 99! \equiv ? \pmod{101}, \quad 98! \equiv ? \pmod{101}$$

Hint: Wilsons teorem.

Oppgave 5 La p være et (odde) primtall og anta at $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Bevis at p ikke kan være på formen $p = 4k + 3$. (Så det må altså være på formen $p = 4k + 1$.)

Oppgave 6 Tallet $\sqrt{D}$ har kjedebrøken

$$\sqrt{D} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \ddots}} = [6; \overline{12}]$$

Finn en løsning x, y til Pells ligning

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

beregn D og finn så ytterligere en løsning av Pells ligning.

Oppgave 7 Løs kongruensen

$$x^{65} \equiv 210 \pmod{299}$$

Vi vet at $299 = 13 \cdot 23$.

Oppgave 8 Gitt to tall a og n slik at $gcd(a, n) = 1$ og $a > 1$. La k være den minste positive eksponenten slik at $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, dvs. k er ordenen til a modulo n.

Bevis at dersom $a^j \equiv 1 \pmod{n}$, så må vi ha at $k | j$.

Har kongruensen $a^{101} \equiv 1 \pmod{71}$ noen løsning $a \not\equiv 1$?