Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Peter Lindqvist, telefon 73593529

Eksamen i MA1301/MA6301 Tallteori

Bokmål
Onsdag 9. desember 2009
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X

Sensur: Fredag 8. januar 2010

Oppgave 1

Bevis at det finnes uendelig mange primtall $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ (Euklides).

Oppgave 2

Løs systemet

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Finn alle løsninger av systemet

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ 10x \equiv 11 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Oppgave 3

Løs kongruensen

$$232 \equiv x^{147} \pmod{253}$$

Hint: $253 = 11 \cdot 23$. RSA-koden!

Oppgave 4

Finn kjedebrøksutviklingen

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

Finn siden en løsning $x \geq 1,\ y \geq 1$ av Pells ligning

$$x^2 - 18y^2 = 1.$$

Finn så ytterligere en løsning $x \geq 1,\ y \geq 1$ av Pells ligning. Hvor mange (heltalls)løsninger finnes det?

Oppgave 5

Eksisterer det primtall av typen

$$9^n - n^2, \quad n = 1, 2, 3 \cdots ?$$

Begrunn svaret.

Oppgave 6

Konstruer et tall (”repunit”) av formen

$$11 \cdots 1 = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^n$$

som har divisoren 49.

Oppgave 7

Anta at $p \geq 3$ er et primtall og at p ikke er en divisor av heltallet a. Bevis at en av kongruensene

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p), \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$$

gjelder. Er det mulig at begge gjelder samtidig?