Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1301 Tallteori
Høst 2020

Løsningsforslag — Øving 1

1.1.1e Vi ønsker å vise at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \text{ for alle } n \geq 1, \tag{1}$$

ved å bruke matematisk induksjon.

Steg I:
Vi viser at (1) holder for $n = 1$. Vi ser at for $n = 1$ er venstresiden til (1) lik 1, og høyresiden er også lik 1. Dermed holder (1) for $n = 1$.

Steg II:
Vi viser at dersom (1) holder for $n = k$, så holder (1) også for $n = k + 1$. Så vi antar at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \tag{IH}$$

for noen $k \geq 1$. Dette er vår induksjonshypotese, og derfor kaller vi den (IH). Vi ønsker å vise at (IH) impliserer at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Vi beviser dette ved å begynne med den venstre siden til (2), og skrive den om ved bruk av (IH):

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 \\
&\overset{(IH)}{=} \left(\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2\right) + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}\right) + (k+1)^2(k+1) \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Altså holder (1) for $n = k + 1$, og induksjonen er ferdig. Følgelig holder (1) for alle $n \geq 1$.

1.1.4 Vi ønsker å vise at for alle $n \in \mathbb{Z}$ finnes det $a \in \mathbb{Z}$ og $b \in \mathbb{Z}$ slik at

$$n^3 = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Vi gjør dette i to steg, først viser vi at det er sant for positive n, og så at det er sant for negative n (det er åpenbart sant for $n = 0$, bare la $a = b = 0$).

La $n > 0$. Hintet i oppgaven sier at

$$n^3 = (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3),$$

og ved å bruke (1) fra oppgave 1.1.1e) ser vi at vi kan skrive om dette til

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2.$$

Enten er n et partall, eller så er både $n-1$ og $n+1$ partall. I begge tilfeller er begge brøkene over heltall, og vi har vist (3) for $n > 0$.

La nå $n < 0$. Merk at vi ikke kan bruke hintet direkte, siden $n^3 < 0$ når $n < 0$, og vi kan ikke "telle oppover" til et negativt tall. Men hvis vi nå setter $m = -n$, så vil $m > 0$, og vi kan bruke argumentet over til å si at

$$\begin{aligned} m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2 &= \left(\frac{-n(-n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(-n-1)(-n)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n+1)(n)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$n^3 = -(m^3) = -\left(\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2,$$

som igjen er differansen mellom kvadratene av to heltall. Dermed har vi vist at (3) holder for alle $n \in \mathbb{Z}$.

1.1.9 Vi ønsker å vise at dersom $1 + a > 0$, så er

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \text{ for alle } n \geq 1. \tag{4}$$

Vi bruker induksjon.

Steg I:
Vi ser at (4) holder for $n = 1$, siden $(1+a)^1 = 1 + a \geq 1 + 1 \cdot a$.

Steg II:
Vi antar nå at (4) stemmer for $n = k$, og vi vil vise at det da også stemmer for $n = k + 1$. Vi antar altså at

$$(1+a)^k \geq 1 + ka, \tag{IH}$$

og vi ønsker å bruke det til å vise at

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a.$$

Med litt omskriving ser vi at

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\ &\geq (1+a)(1+ka) \\ &= 1+(k+1)a+a^2 \\ &\geq 1+(k+1)a\end{aligned}$$

Her kommer den første ulikheten fra (IH), og den andre kommer av at a^2 alltid er positivt. Med dette har vi vist at (4) holder for $n = k+1$, og induksjonen er ferdig. Følgelig holder (4) holder for alle $n \geq 1$.

$\boxed{\text{1.2.3a}}$ Vi ønsker å vise at

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \tag{5}$$

For å gjøre det bruker vi binomialteoremet, som sier at

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ \text{for alle } n\geq 1. \tag{6}$$

Ved å sette $a = b = 1$, ser vi at vi får

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}, \tag{7}$$

som er det vi vil vise.

$\boxed{\text{1.2.3b}}$ Vi kan bruke samme argument som over, men sette $a = 1$ og $b = -1$ i binomialteoremet. Da får vi at

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}, \tag{8}$$

som er det vi ønsker å vise.

$\boxed{\text{1.2.3e}}$ Fra (a) og (b) har vi at

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n, \tag{9}$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0. \tag{10}$$

Vi ønsker å vise at

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots=2^{n-1}, \tag{11}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}. \tag{12}$$

Ved å legge sammen (9) og (10) får vi

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + (1 + (-1)^{n-1})\binom{n}{n-1} + (1 + (-1)^{n})\binom{n}{n} = 2^n. \tag{13}$$

I tilfellet hvor n er et partall gir dette

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots + 2\binom{n}{n} = 2^n, \tag{14}$$

og ved å dele på 2 får vi (11) for partall. Dersom n er et oddetall har vi i stedet

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots + 2\binom{n}{n-1} = 2^n, \tag{15}$$

og ved å dele dette på 2 får vi (11) for oddetall. Dermed har vi vist at ligning (11) stemmer for alle naturlige tall. Ligning (12) vises på stort sett samme måte, men i stedet for å legge dem sammen, så trekker vi ligning (10) fra ligning (9). Vi utelater detaljene i utregningen her.

$\boxed{\text{2.2.3a}}$ La $a \in \mathbb{Z}$. Divisjonsalgoritmen gir at $\exists\ q, r \in Z$ med $a = 3q + r$, hvor $0 \leq r < 3$, dvs. $r \in \{0, 1, 2\}$. Det vil si at a er på én av følgende former:

$$3q,\ 3q + 1,\ 3q + 2$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} a = 3q &\implies a^2 = 9q^2 = 3(3q^2) \\ a = 3q + 1 &\implies a^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 \\ a = 3q + 2 &\implies a^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1 \end{aligned}$$

Så a^2 er på formen $3k$ eller $3k + 1$.

$\boxed{\text{2.2.3b}}$ Samme argument som over gir:

$$\begin{aligned} a = 3q &\implies a^3 = 27q^3 = 9(3q^3) \\ a = 3q + 1 &\implies a^3 = 27q^2 + 9q^2 + 9q + 1 = 9(3q^3 + q^2 + q) + 1 \\ a = 3q + 2 &\implies a^3 = 27q^3 + 18q^2 + 18q + 8 = 9(3q^2 + q^2 + q) + 8 \end{aligned}$$

Så vi ser at a^3 er på formen $9k$, $9k + 1$ eller $9k + 8$.

$\boxed{\text{2.2.3c}}$ Her kan vi bruke et lignende argument som over. Fra divisjonsalgoritmen vet vi at for $a \in \mathbb{Z}$ så $\exists\ q, r \in Z$ med $a = 5q + r$, hvor $0 \leq r < 5$, dvs. $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Det vil si at a er på én av følgende former:

$$5q,\ 5q + 1,\ 5q + 2,\ 5q + 3,\ 5q + 4$$

På samme måte som tidligere kan vi regne ut a^4 for hver av mulighetene. Men for å spare oss for litt arbeid kan vi gjøre følgende observasjon: Hvis $a = 5q + r$ så vil hvert eneste ledd i $a^4 = (5q + r)^4$ inneholde 5 som en faktor, bortsett fra det siste leddet, som er r^4. Dermed holder det å se på r^4 for de ulike valgene av r:

$$\begin{aligned}
r = 0 &\implies r^4 = 0 = 5 * 0 \\
r = 1 &\implies r^4 = 1 = 5 * 0 + 1 \\
r = 2 &\implies r^4 = 16 = 5 * 3 + 1 \\
r = 3 &\implies r^4 = 81 = 5 * 16 + 1 \\
r = 4 &\implies r^4 = 256 = 5 * 51 + 1
\end{aligned}$$

Dermed ser vi at a^4 er på formen $5k$ eller $5k + 1$, uansett hva a er.

2.2.8 Alle tallene 11, 111, 1111, osv. er på formen $4k + 3$, som vist i hintet. Men ingen tall på formen $4k + 3$ kan være kvadrattall. For å se det, observer at ethvert heltall er enten et partall eller et oddetall. For et partall $n = 2k$ har vi at $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, som er delelig på 4. For et oddetall $n = 2k+1$ har vi at $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2 + k) + 1$, som har rest 1 når vi deler på 4. Så alle kvadrattall er på formen $4k$ eller $4k + 1$. Det betyr at ingen av tallene $111 \dots 111$ kan være kvadrattall, siden de er på formen $4k + 3$.

Eksamen K2017 - oppg. 2 Vi skal vise ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot i = 2 + 2^{n+1}(n - 1)$ for alle naturlige tall n.

I basissteget for induksjonen setter vi $n = 1$ og får:

$$\sum_{n=1}^{1} 2^i \cdot i = 2^1 \cdot 1 = 2 = 2 + 2^{1+1}(1 - 1).$$

Vi ser at påstanden holder for $n = 1$.

I induksjonssteget antar vi at påstanden holder for $n = k$, der k er et vilkårlig naturlig tall, og vil vise at da holder den også for $n = k + 1$. Vi får følgende (i likheten merket med $*$ bruker vi induksjonshypotesen):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} 2^i \cdot i = \sum_{i=1}^{k} 2^i \cdot i + 2^{k+1}(k + 1) &\overset{*}{=} 2 + 2^{k+1}(k - 1) + 2^{k+1}(k + 1) \\
= 2 + 2 \cdot 2^{k+1}k &= 2 + 2^{(k+1)+1}((k + 1) - 1)
\end{aligned}$$

Dette betyr at påstanden også holder for $n = k + 1$, og induksjonsbeviset er ferdig.

Eksamen K2019 - oppg. 4 For å vise at alle oddetall kan skrives som differansen mellom to kvadrattall kan vi bruke et meget nyttig triks, nemlig å "legge til null". Fordi hvis

n er et oddetall så finnes det et naturlig tall k slik at $n = 2k+1$, og hvis vi da legger til og trekker fra k^2, så får vi

$$n = 2k + 1 = 2k + 1 + (k^2 - k^2) = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = (k + 1)^2 - k^2.$$

Siden både k og $k + 1$ er heltall, så viser dette at alle oddetall kan skrives som differansen mellom to heltall.

Eksamen H2019 - oppg. 4 Som vi så i løsningen til oppgave 2.2.8, har et kvadrattall rest 0 eller 1 når det deles på 4. Dette betyr at et tall som *ikke* har rest lik 0 eller 1 når det deles på 4, ikke kan være et kvadrattall. Så det holder for oss å vise at $38, 948, 127, 483$ ikke har rest lik 0 eller 1 når det deles på 4. Vi ser at tallet kan skrives som

$$389, 481, 274 * 100 + 80 + 3 = (389, 481, 274 * 25) * 4 + 20 * 4 + 3$$

Siden tallet kan skrives som $4m + 3$ for en $m \in \mathbb{N}$, så har det rest lik 3 når vi deler på 4. Følgelig kan tallet ikke være et kvadrattall, og vi er ferdig.