Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1301 Tallteori
Høst 2020

Løsningsforslag — Øving 3

2.5.1 En diofantisk ligning $ax + by = c$ har en løsning hvis og bare hvis $d \mid c$, hvor $d = \gcd(a, b)$. Vi sjekker ligningene som er gitt i oppgaven:

$$\begin{aligned} &a) \quad \gcd(6, 51) = 3, \quad 3 \nmid 22 \implies \text{Ingen løsning} \\ &b) \quad \gcd(33, 14) = 1, \quad 1 \mid 115 \implies \text{Løsning} \\ &c) \quad \gcd(14, 35) = 7, \quad 7 \nmid 93 \implies \text{Ingen Løsning} \end{aligned}$$

2.5.2c) Vi skal finne alle heltallsløsningene til ligningen $221x + 35y = 11$. Vi begynner med å bruke euklids algoritme til å finne $\gcd(221, 35)$:

$$\begin{aligned} 221 &= 6 \cdot 35 + 11 \\ 35 &= 3 \cdot 11 + 2 \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Så $\gcd(221, 35) = 1$, og siden $1 \mid 11$ betyr det at det finnes løsninger til den diofantiske ligningen. For å kunne skrive 1 som en lineærkombinasjon av 221 og 35 gjør vi algoritmen baklengs, og får:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 \\ &= 11 - 5 \cdot (35 - 3 \cdot 11) \\ &= 16 \cdot 11 - 5 \cdot 35 \\ &= 16 \cdot (221 - 6 \cdot 35) - 5 \cdot 35 \\ &= 16 \cdot 221 - 101 \cdot 35 \end{aligned}$$

Ved å gange begge sidene med 11, får vi at $176 \cdot 221 - 1111 \cdot 35 = 11$. Dermed er $x_0 = 176$, $y_0 = -1111$ en partikulærløsning av den diofantiske ligningen, og alle løsninger er da gitt ved:

$$\begin{aligned} x &= 176 + \left(\frac{35}{1}\right) \cdot t & \qquad y &= -1111 - \left(\frac{221}{1}\right) \cdot t \\ x &= 176 + 35t & y &= -1111 - 221t \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{Z}$.

3.1.7 Siden hver faktor i $50! = 50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ er mindre enn eller lik 50, inneholder ikke $50!$ noen primtallsfaktorer som er større enn 50. Derfor vil $p \nmid 50!$ for alle primtall $p \geq 47$ (det største primtallet < 50 er 47). For å se at $p \mid 50!$ for alle primtall $p \leq 47$, holder det å observere at hvert av disse primtallene inngår som en faktor i $50!$ (siden alle heltall $1 \leq n \leq 50$ gjør det).

Så svaret er at et primtall $p \mid 50!$ hvis og bare hvis $p \leq 47$.

3.1.10 Vi antar at p er et oddetall, så p^2 vil også være et oddetall, og følgelig vil både p^2-1 og p^2+1 være partall. Det betyr at de begge er delelig på 2, så hvis vi kan vise at et av dem er delelig på 5, så vil det automatisk være delelig på 10. Siden p er et odde primtall $\neq 5$ vet vi at p har en rest som ikke er null når vi deler det på 5. Dermed kan vi skrive p som $p = 5q + r$, hvor $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. For tilfellene $r = 2$ og $r = 3$ kan vi regne ut at

$$\begin{aligned} p = 5q+2 &\implies p^2+1 = (25q^2+20q+4)+1 = 5(5q^2+4q+1) &&\implies 5 \mid p^2+1 \\ p = 5q+3 &\implies p^2+1 = (25q^2+30q+9)+1 = 5(5q^2+6q+2) &&\implies 5 \mid p^2+1 \end{aligned}$$

For tilfellene $r = 1$ og $r = 4$ kan vi forenkle regningen litt ved å observere at $p^2-1 = (p-1)(p+1)$. Da får vi nemlig at

$$\begin{aligned} p = 5q+1 &\implies p-1 = (5q+1)-1 = 5q &&\implies 5 \mid p-1 \implies 5 \mid p^2-1 \\ p = 5q+4 &\implies p+1 = (5q+4)+1 = 5q+5 &&\implies 5 \mid p+1 \implies 5 \mid p^2-1 \end{aligned}$$

Dermed ser vi at $5 \mid p^2-1$ eller $5 \mid p^2+1$ for alle odde primtall $p \neq 5$, og siden begge som sagt deles av 2, så gir dette at $10 \mid p^2-1$ eller $10 \mid p^2+1$ for alle odde primtall $p \neq 5$.

3.2.1 $\sqrt{701} \approx 26.5$, så for å finne ut om 701 er et primtall må vi teste alle primtall $p \leq 23$ som mulige divisorer. Vi prøver å dele 701 på hvert primtall $2, 3, \ldots, 23$, og vi ser at ingen av divisjonene gir et heltall. Det betyr at ingen av primtallene $p \leq \sqrt{701}$ er en divisor i 701, som igjen betyr at 701 må være et primtall.

Vi gjør det samme for 1009. Siden $\sqrt{1009} \approx 31.8$ må vi sjekke alle primtallene $p \leq 31$. Vi prøver å dele 1009 på hvert av primtallene $2, 3, \ldots, 31$, og igjen ser vi at ingen av divisjonene gir et heltall. Dermed konkluderer vi med at også 1009 må være et primtall.

3.2.5 Dersom n er et sammensatt tall må n inneholde minst en primtallsfaktor som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$. Hvis n er et tresifret tall, så er $n < 1000$, som betyr at $\sqrt{n} < \sqrt{1000} \approx 31.6$. Dermed vil alle sammensatte tresifrede tall inneholde en primtallsfaktor som er mindre enn eller lik 31.

Eksamen H2010 oppg. 5 Anta at $\sqrt{pq}$ er et rasjonalt tall. Da finnes to heltall a, b slik at $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$ og $\gcd(a, b) = 1$. Kvadrering gir

$$pq = \frac{a^2}{b^2}$$

og ved å gange med b^2 på begge sider får vi

$$pqb^2 = a^2.$$

Dette gir at p deler a^2, som igjen medfører at p deler a siden p er et primtall. Dette betyr at $a = pn$ for et heltall n, og når vi setter inn i ligningen over får vi

$$pqb^2 = a^2 = p^2n^2.$$

Vi deler ut p og får
$$qb^2 = pn^2.$$
Da må p dele qb^2, og siden $\gcd(p, q) = 1$ (husk at p og q er ulike primtall) må p da dele b^2, som igjen medfører at p deler b. Vi har nå vist at p deler både a og b, men dette er umulig, siden $\gcd(a, b) = 1$. Med andre ord har vi en motsigelse, så $\sqrt{pq}$ kan ikke være et rasjonalt tall.

Merk at vi også kunne ha argumentert på samme måte med rollene til p og q byttet om.

Eksamen H2018 oppg. 7 Koeffisientene foran variablene er $3a+7$ og $2a+5$. Se på likheten
$$(3a + 7) \cdot (-2) + (2a + 5) \cdot 3 = 1$$
Dette viser at tallet 1 kan skrives som en lineærkombinasjon av de to koeffisientene, og da har vi et resultat som sier at $\gcd(3a + 7, 2a + 5) = 1$. Da er den diofantiske ligningen løsbar, uansett hva b er, siden 1 deler b.

Ved å multiplisere likheten over med b, får vi
$$(3a + 7) \cdot (-2b) + (2a + 5) \cdot 3b = b$$
Det betyr at $x_0 = -2b$, $y_0 = 3b$ er en partikulærløsning av ligningen. Da er alle løsningene gitt ved
$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2a+5}{1} \cdot t & \qquad y &= y_0 - \frac{3a+7}{1} \cdot t \\ &= (2a + 5)t - 2b & &= 3b - (3a + 7)t \end{aligned}$$
for $t \in \mathbb{Z}$.

Eksamen V2011 oppg. 6 Vi følger hintet, og setter uttrykket på felles brøkstrek:
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_t} = \frac{p_2p_3 \cdots p_t + p_1p_3 \cdots p_t + \ldots + p_1p_2 \cdots p_{t-1}}{p_1p_2 \cdots p_t}$$
La oss se nærmere på telleren. Ledd n i summen er produktet av alle primtallene bortsett fra p_n. Dette betyr at p_n er en felles faktor i alle leddene si summen bortsett fra det n-te leddet. Det gjør at vi kan skrive summen som $ap_n + b$, hvor $p_n \nmid b$. For eksempel kan vi skrive summen som
$$p_2p_3 \cdots p_t + p_1(p_3p_4 \cdots p_t + p_2p_4 \cdots p_t + \ldots + p_2p_3 \cdots p_{t-1})$$
det vil si samle p_1 som felles faktor for alle leddene bortsett fra det første. Siden alle primtallene er ulike, vil $p_1 \nmid p_2p_3 \cdots p_t$, så hele summen kan skrives som ett ledd som har p_1 som faktor pluss ett ledd som ikke har p_1 som faktor. Det betyr at p_1 ikke deler summen. La oss nå se hva dette innebærer for brøken
$$\frac{p_2p_3 \cdots p_t + p_1p_3 \cdots p_t + \ldots + p_1p_2 \cdots p_{t-1}}{p_1p_2 \cdots p_t}.$$
Siden p_1 ikke deler telleren, kan faktoren p_1 ikke forkortes bort fra nevneren. Altså har vi en brøk hvor telleren ikke deler nevneren, og følgelig kan ikke brøken forkortes

til et heltall. Siden denne brøken kun er en omskriving av uttrykket vi er interessert i, konkludere vi med at

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_t}$$

ikke kan være et heltall.