Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

6.1.1 Fra teorem 6.1 i Burton har vi at d er en divisor av $m = p_1^{k_1} p_2^{k2} \cdots p_r^{k_r}$ hvis og bare hvis den er på formen

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r},$$

hvor $0 \leq a_i \leq k_i$ for $i = 1, 2, \ldots, r$. Det samme gjelder for $n = p_1^{j_1} p_2^{j2} \cdots p_r^{j_r}$, som har d som divisor hvis og bare hvis

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r},$$

hvor $0 \leq b_i \leq j_i$ for $i = 1, 2, \ldots, r$. Dermed vil $p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r}$ hvor $u_i = \min\{k_i, j_i\}$ være en divisor av både m og n. Videre vil alle andre tall som er divisor av både m og n kun ha primtallsfaktorer p_i med eksponent som er mindre enn eller lik u_i (hvis ikke kan det ikke være en divisor av både m og n). Altså vil ethvert tall som deler både m og n også dele $p_1^{u_i} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r}$, og følgelig er $\gcd(m, n) = p_1^{u_i} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r}$.

Hvis vi nå lar $M = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_r^{v_r}$, hvor $vi = \max\{k_i, j_i\}$, så gir teorem 6.1 at

$$m \mid M \qquad \text{og} \qquad n \mid M.$$

Videre vil et tall som ikke inneholder hver av primtallsfaktorene p_i med eksponent som er større eller lik u_i ikke kunne være delelig på både m og n. Altså vil alle tall som er delelig på både m og n være delelig på M. Dermed konkluderer vi med at $M = \operatorname{lcm}(m, n)$.

6.1.8 Anta først at $n = p^k$ for et primtall p. Da er $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^k$ og

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{p^n} + \frac{1}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{p} + 1 = \sum_{d|n} \frac{1}{d}.$$

Altså holder resultatet når $n = p^k$. Anta nå at $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Da blir

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(n)}{n} &= \frac{\sigma(p_1^{k_1})}{p_1^{k^1}} \cdot \frac{\sigma(p_2^{k_2})}{p_2^{k^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sigma(p_r^{k_r})}{p_r^{k^r}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_1^{k_1}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_2^{k_2}}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_r} + \ldots + \frac{1}{p_r^{k_r}}\right) \\
&= \sum_{0 \leq m_i \leq k_i, 1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}
\end{aligned}$$

Den siste likheten kommer av teorem 6.1.

6.1.9 Et kvadratfritt tall er et heltall n slik at ingen kvadrattall deler n (bortsett fra 1^2). Vi har at 1 er et kvadratfritt tall, og at $\tau(1) = 1 = 2^0$. Altså stemmer resultatet for $n = 1$, siden 1 ikke har noen primtallsfaktorer. Anta nå at $n > 1$ er kvadratfritt. Da er n et produkt av ulike primtall

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

For hvis ikke vil jo p^2 dele n for et primtall p. Får da fra teorem 6.2 at

$$\tau(n) = \underbrace{(1+1)(1+1)\cdots(1+1)}_{r} = 2^r$$

6.2.1 **a)**
Siden $n, n+1, n+2$ og $n+3$ er fire etterfølgende heltall vil ett av dem være delelig på $4 = 2^2$. Siden det ikke er kvadratfritt vil μ av det være 0, og følgelig vil produktet også være lik 0 **b)**

Vi regner ut

$$\begin{aligned} \mu(1!) &= \mu(1) = 1 \\ \mu(2!) &= \mu(2) = -1 \\ \mu(3!) &= \mu(2 \cdot 3) = 1 \end{aligned}$$

For $n > 3$ vil $n!$ inneholde 4 som en faktor, og følgelig vil $\mu(n!) = 0$. Dermed får vi at for $n \geq 3$ vil

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = \mu(1!) + \mu(2!) + \mu(3!) + 0 + \ldots + 0 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

6.2.5 For et heltall n betegner $S(n)$ antall kvadratfrie divisorer av n. Vi skal vise at

$$S(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$$

hvor $\omega(n)$ er antallet ulike primtallsfaktorer n har. Den første likheten holder siden $\mu(d) \neq 0$ hvis og bare hvis d er kvadratfritt, og for alle kvadratfrie divisorer d er $|\mu(d)| = 1$. Dermed vil

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\#\text{ kvadratfrie divisorer}} = S(n).$$

For å vise den andre likheten benytter vi oss av hintet, som sier at $S(n)$ er en multiplikkativ funksjon, og ser på primtallsfaktoriseringen til $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Siden $S(n)$ er multiplikkativ har vi at $S(n) = S(p_1^{k_1}) \cdot S(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot S(p_r^{k_r})$. Observer nå at for et primtall p er $S(p^k) = S(p) = 2$, siden de eneste kvadratfrie faktorene til p^k er 1 og p. Dermed får vi at

$$\begin{aligned} S(n) &= S(p_1^{k_1}) \cdot S(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot S(p_r^{k_r}) \\ &= S(p_1) \cdot S(p_2) \cdot \ldots S(p_r) \\ &= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{r} = 2^r \end{aligned}$$

hvor r er lik antall ulike primtallsfaktorer i n, altså $r = \omega(n)$, og vi har vist det vi ville.