MA1301 Tallteori
Høst 2020

Løsningsforslag — Øving 8

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{\text{6.1.6}}$ Vi skal vise at $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ for alle $n \geq 1$. Fra hintet har vi at hvis $d \mid n$ så vil d eller $\frac{n}{d}$ være mindre eller lik $\sqrt{n}$. Mer spesifikt kan vi ordne alle divisorene til n i par $(d, \frac{n}{d})$, hvor $d \leq \sqrt{n}$ og $\frac{n}{d} \geq \sqrt{n}$. Det betyr at antallet divisorer som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$ er det samme som antallet divisorer som er større enn eller lik $\sqrt{n}$. Antallet divisorer som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$ er gitt av denne summen

$$\sum_{\substack{d|n \\ d\leq\sqrt{n}}} 1.$$

Siden antallet positive heltall som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$ er enten $\sqrt{n}$ eller $\sqrt{n}-1$ (avhengig av om $\sqrt{n}$ er et heltall), så gir dette følgende ulikhet

$$\sum_{\substack{d|n \\ d\leq\sqrt{n}}} 1 \leq \sum_{i\leq\sqrt{n}} 1 \leq \sqrt{n}.$$

Altså har n færre enn $\sqrt{n}$ divisorer som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$. Nå bruker vi at det er like mange divisorer som er større en eller lik $\sqrt{n}$ som divisorer som er mindre enn eller lik $\sqrt{n}$, til å konkludere at det totale antallet divisorer til n er mindre enn eller lik $2\sqrt{n}$. Altså er

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \leq 2\sqrt{n}.$$

$\boxed{\text{6.1.7a)}}$ Vi skal vise at $\tau(n)$ er et oddetall hvis og bare hvis n er et kvadrattall. Observer først at n er et kvadrattall hvis og bare hvis alle primtallsfaktorene i primtallsfaktoriseringen til n har partallspotens: La $n = m^2$, hvor m har primtallsfaktoriseringen $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Da vil n ha primtallsfaktorisering

$$\begin{aligned} n &= (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r})^2 \\ &= p_1^{k_1} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} p_r^{k_r} \\ &= p_1^{k_1+k_1} p_2^{k_2+k_2} \cdots p_r^{k_r+k_r} \\ &= p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdots p_r^{2k_r} \end{aligned}$$

Altså har alle primtallsfaktorene til n partallspotens når n er et kvadrattall. Anta nå at alle primtallsfaktorene i primtallsfaktoriseringen til n har partallspotens. Da kan n skrives som $n = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdots p_r^{2k_r}$, og utregningen over viser da at $n = (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r})^2$, som er et kvadrattall. Dermed har vi vist at n er et kvadrattall hvis og bar hvis alle primtallsfaktorene til n har partallspotens.

Nå bruker vi teorem 6.2a) i Burton, som sier at hvis n har primtallsfaktorisering $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_s^{l_s}$, så vil $\tau(n) = (l_1 + 1)(l_2 + 1) \cdots (l_r + 1)$. Legg merke til at dette produktet er et oddetall hvis og bare hvis alle faktorene er oddetall, dvs. når alle potensene l_i er partall. Og som vi akkurat har vist, er alle potensene l_i partall hvis og bare hvis n er et kvadrattall.

6.1.12 **a)**

Hvis n har primtallsfaktorisering $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, sier teorem 6.2$a$) i Burton at $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$. Dermed er det kun to tilfeller hvor $\tau(n)$ kan være lik 10. Enten når én av faktorene i produktet er 10 og alle andre er 1, eller når én av faktorene er 2, en annen faktor er 5, og alle andre er 1. Vi kan stokke om på faktorene uten å endre produktet, så uten tap av generalitet kan vi anta at vi er i en av følgende situasjoner:

$$\begin{aligned} \tau(n) = k_1 + 1 = 10 \quad &\Longrightarrow \quad k_1 = 9 \\ \tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 2) = 2 \cdot 5 \quad &\Longrightarrow \quad k_1 = 1, k_2 = 4 \end{aligned}$$

I det første tilfellet er n et tall på formen p^9, hvor p er et primtall. Det minste tallet på den formen er $2^9 = 512$. I det andre tilfellet er n på formen $p \cdot q^4$, hvor p og q er ulike primtall. Det minste tallet på den formen er $3 \cdot 2^4 = 48$. Altså er $n = 48$ det minste positive heltallet som tilfredsstiller $\tau(n) = 10$.

b)

Vi bruker hintet, som sier at for $n > 1$ vil $\sigma(n) > n$. Det betyr at hvis $\sigma(n) = 10$, så må $n < 10$. Nå kan vi manuelt sjekke $\sigma(n)$ for hver $1 \leq n < 10$:

$$\begin{array}{ll} \sigma(1) = 1 & \sigma(6) = 12 \\ \sigma(2) = 3 & \sigma(7) = 8 \\ \sigma(3) = 4 & \sigma(8) = 15 \\ \sigma(4) = 7 & \sigma(9) = 13 \\ \sigma(5) = 6 & \end{array}$$

6.2.3 La $n > 1$ være et heltall med primtallsfaktorisering $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Vi skal vise at for en multiplikativ funksjon $f \neq 0$ holder følgende likhet:

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r))$$

Vi følger hintet, og definerer funksjonen F ved at $F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d)$. Fra teorem 6.4 vet vi at dette er en multiplikativ funksjon, som medfører at

$$F(n) = F(p_1^{k_1}) \cdot F(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot F(p_r^{k_r}).$$

Det betyr at vi bare trenger å finne ut hvordan F oppfører seg på faktorene $p_i^{k_i}$. Ved å bruke definisjonen av Möbiusfunksjonen μ, samt at alle divisorene til $p_i^{k_i}$ er på formen p_i^j for $0 \leq j \leq k_i$, ser vi at

$$
\begin{aligned}
F(p_i^{k_i}) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d) &= \sum_{j=0}^{k_i} \mu(p_i^j) f(p_i^j) \\
&= 1 \cdot f(1) + (-1) \cdot f(p_i) + 0 + \ldots + 0 \\
&= 1 - f(p_i) \qquad \big(f(1) = 1 \text{ siden } f \text{ er multiplikativ og} \neq 0\big)
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at $F(p_i^{k_i}) = 1 - p_i$ for alle $1 \leq i \leq r$, som betyr at

$$F(n) = F(p_1^{k_1}) \cdot F(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot F(p_r^{k_r}) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r))$$

$\boxed{\text{6.2.7}}$ a)

La $m > 1$ og $n > 1$ være to heltall med primtallsfaktorisering hhv. $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ og $n = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}$. Da vil mn ha primtallsfaktorisering

$$mn = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}$$

Vær obs på at det her kan hende at $p_i = q_j$ for noen i og j. Vi ønsker å vise at $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$, uten noe krav om at $\gcd(m, n) = 1$. Vi bruker definisjonen av λ:

$$
\begin{aligned}
\lambda(m)\lambda(n) &= \lambda(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}) \lambda(q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}) \\
&= (-1)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_r} (-1)^{l_1 + l_2 + \cdots + l_s} \\
&= (-1)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_r + l_1 + l_2 + \cdots + l_s} \\
&= \lambda(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}) \\
&= \lambda(mn)
\end{aligned}
$$

Siden dette gjelder uavhengig av om $\gcd(m, n) = 1$ eller ikke, så har vi nå vist at λ er fullstendig multiplikativ.

b)

Vi definerer funksjonen $F(n)$ til å være lik summen vi er interessert i, altså er $F(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$. Siden $\lambda(n)$ er en multiplikativ funksjon gir teorem 6.8 at $F(n)$ også er multiplikativ. Det betyr at vi kun trenger å finne ut hvordan den oppfører seg på potenser av primtall. La p være et primtall og $k > 1$ et heltall. Da vil alle divisorene til p^k være på formen p^i, for $0 \leq i \leq k$. Dermed får vi at

$$F(p^k) = \sum_{d|p^k} \lambda(p^i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i = \begin{cases} 1, & \text{hvis } k \text{ er et partall} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Dette gjelder for hver primtallsfaktor i primtallsfaktoriseringen til n. Anta at n har primtallsfaktorisering $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Siden $F(n)$ er multiplikativ har vi at

$$F(n) = F(n) = F(p_1^{k_1}) \cdot F(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot F(p_r^{k_r}),$$

og siden hver av disse faktorene er 1 hvis og bare hvis potensen k_i er et partall (og 0 ellers), er $F(n) = 1$ hvis og bare hvis alle primtallsfaktorene i faktoriseringen til n har partallspotens (ellers er $F(n) = 0$). Som vi så oppgave 6.1.7a) skjer det hvis og bare hvis $n = m^2$. Dermed har vi vist at

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = m^2 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$