Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger (“prøveeksamen” Øving 13)

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf:

Eksamensdato: November 2022

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vis at $u(z) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ er harmonisk for alle $z = x + iy$ i det komplekse plan.

b) Finn en hel funksjon f slik at $f(0) = 0$ og $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, hvor u er som i punkt (a).

Oppgave 2

a) Beregn det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4},$$

der a er en vilkårlig reell konstant.

b) La $C_2(0)$ være den positivt orienterte sirkelen med sentrum i 0 og radius 2. Beregn det komplekse linjeintegralet

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz.$$

Oppgave 3 La f være en 2π-periodisk funksjon slik at

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

a) Forklar hvorfor $\widehat{f}(n)$ er reelle og $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ for alle heltall n. Finn deretter Fourier-rekken til f.

b) Bruk resultatet i punkt (a) og det du vet om konvergens av Fourier-rekker til å vise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Finn først alle løsninger av randverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \quad 0 < x < \pi, t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

på formen $u(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$. Skriv deretter ned en løsning $u(x,t)$ på rekkeform slik at

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x).$$

Oppgave 4 La a, b, c være vilkårlige positive konstanter. Hvor mange nullpunkter har polynomet $z^5 + az^4 + bz^3 + c$ i første kvadrant?

Oppgave 5 La u være en harmonisk funksjon på $\mathbb{C}$. Vis at hvis det finnes en konstant M slik at $u(z) \leq M$ for all z, så er u en konstant, det vil si $u(z)$ tar samme verdi i alle punkter z. (Hint: Hvordan kan du bruke Liouvilles teorem?)

Oppgave 6 La f være en analytisk funksjon på enhetsdisken som er begrenset i absoluttverdi av 1. Vis at hvis vi også har $f(0) = 0$, så vil ulikheten

$$|f(z)| \leq |z|$$

holde for all z i enhetsdisken. (Hint: Husk maksimum-modulus-prinsippet for analytiske funksjoner.)