Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar Rønquist, tlf. 73 59 35 47

EKSAMEN I FAG SIF5040 NUMERISKE METODER

Tirsdag 15. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: C1 – Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Alle kalkulatortyper tillatt.

Sensuren faller i uke 23.

Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig går fram hvilke metoder og mellomresultater som er anvendt.

Oppgave 1 I denne oppgaven skal vi se på polynom-interpolasjon og spline-interpolasjon av funksjonen

$$f(x) = (e^x - 1)(3 - x), \quad 0 \le x \le 3.$$

Vi skal interpolere funksjonen i punktene $x_i = 0, 1, 2, 3$, d.v.s., vi har datasettet:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
f_i	0	3.43	6.39	0

a) Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer funksjonen $f(x)$ i punktene $x_i = 0, 1, 2, 3$.

b) Finn den naturlige kubiske spline $S(x)$ som interpolerer funksjonen $f(x)$ i punktene $x_i = 0, 1, 2, 3$. (Du begynner med å beregne $z_i = S''(x_i)$. Splines funksjonen $S(x)$ kan skrives ved utrykk av z_i.)

Hva blir $S(2.5)$?

Oppgave 2 Strømmen i et krets er gitt som en funksjon av tiden

$$I(t) = A\,(\sin(t))^B\, e^{Ct}, \tag{1}$$

hvor A, B, C er konstante parametre. I et eksperiment målte vi følgende data:

t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$I(t)$	0.35	0.55	0.53	0.40	0.35

Konstantene A, B, C bestemmes slik at funksjonen (1) tilpasser dataene best mulig. Omskriv funksjonen (1), beregn deretter konstantene A, B, C ved bruk av lineær minste kvadraters metode.

Hva blir strømmen når $t \to \infty$?

Oppgave 3 Vi skal finne null-punkter til funksjonen $f(x) = \sin(x)$ ved numeriske metoder. Vi ser at $x_1 = 0$ og $x_2 = \pi$ er begge eksakt løsningen til $f(x) = 0$.

a) Først, skal vi løse problemmet ved fikspunkt iterasjon. La

$$x = g_F(x) \quad \text{hvor} \quad g_F(x) = x + \sin x.$$

Sett opp iterasjons-skjema.

La startverdi $x^0 = 3.0$ (som ligger nær løsningen $x_2 = \pi$) og kjør 2 iterasjoner. La nå startverdi $x^0 = 0.1$ (som ligger nær løsningen $x_1 = 0$) og kjør 6 iterasjoner. Hva får du? Forklar resultatet.

b) Vi bruker nå Newtons metode. Sett opp iterasjons-skjemaet og kjør 2 iterasjoner med de to startverdiene $x^0 = 3.0$ og $x^0 = 0.1$. Hva finner du nå? Forklar hvorfor resultatet er forskjellige fra fikspunkt-iterasjonene.

c) I denne oppgaven skal vi se på feil. La e^k være feilen i iterasjons-steg nr. k, d.v.s., $e^k = |s - x^k|$ hvor s er eksakt løsningen.

Man kan vise at, (du skal IKKE vise det!) for fikspunkt iterasjon har vi lineær konvergens, d.v.s.,

$$e^{k+1} \leq m e^k, \quad \text{hvor} \quad m = \max |g_F'(x)|,$$

mens for Newtons metode har vi kvadratisk konvergens, d.v.s.,

$$e^{k+1} \leq M(e^k)^2, \quad \text{hvor} \quad M = \frac{\max |f''(x)|}{2 \min |f'(x)|}.$$

Sett $x^0 = 3.0$ for begge metoder. Hvor mange iterasjoner trengs for fikspunkt iterasjon og Newtons metode, slik at vi er garantert en feil på mindre enn $\varepsilon = 10^{-10}$? Kommenter resultatet.

Oppgave 4 La $u(x,t)$ være løsningen til adveksjon-diffusjons likningen

$$\begin{aligned} &u_t + a u_x = b u_{xx}, \qquad (0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0) \\ &u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \qquad (t \geq 0) \\ &u(x,0) = \bar{u}(x), \qquad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

Her er a, b positive konstanter, $a > 0$, $b > 0$.

Vi ønsker å finne numeriske løsninger til differensiallikningen. La u_i^n være den numeriske tilnærmelsen til $u(x_i, t_n)$ hvor $x_i = i \cdot h$, $t_n = n \cdot k$, og h og k er gitte størrelser i x og t retninger til et uniformt gitter. Vi diskretiserer i x retningen med sentral differenser.

a) Bruk forlengs Euler i tidsdiskretiseringen og sett opp et eksplisitt numerisk skjema.

Vis at under følgende stabilitetsbetingelsene

$$k \leq h^2/(2b), \qquad \text{og} \qquad h \leq 2b/a$$

oppfyller skjemaet maksimumsprinsippet, d.v.s.,

$$\max_i |u_i^{n+1}| \leq \max_i |u_i^n| .$$

b) Bruk baklengs Euler i tidsdiskretiseringen og sett opp et implisitt numerisk skjema.

Vis at skjemaet oppfyller maksimumsprinsippet hvis $h < 2b/a$. Forklar hvorfor denne betingelsen er mye bedre enn det tilsvarende for det eksplisitte skjemaet.

c) Skriv et Matlab program som beregner den numeriske løsningen til differensiallikningen, med både eksplisitt og implisitt skjema. La $u(x, 0) = \bar{u}(x) = \sin(4\pi x)$. Programmet skal sjekke stabilitetsbetingelsene og gi melding hvis dette ikke er oppfylt. Den skal også plotte løsningen.

Programmet kan begynne med:

```
function u=adv_diff(a,b,T,h,k,metode)
% function u=adv_diff(a,b,T,h,k,metode)
% loesninger av adveksjon-diffusjons likningen ved numeriske metoder
% input parameter:
%  a, b: koeffisienter til diff.liknignen
%  T:  tiden vi skal beregne loesningen, t=T.
%  h:  gitter stoerrelse i x
%  k:  gitter stoerrelse i t
%  metode: hvilken metode skal brukes.
%          hvis metode==1, bruk eksplisitt metode,
%          hvis metode==2, bruk implisitt metode.
%
%  resultat:
%        u:  numerisk loesning i tidspunkt t=T.
```