Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Brynjulf Owren (93518)
Arne Marthinsen (900 46025)

EKSAMEN I FAG SIF5040 NUMERISKE METODER

Tirsdag 14. mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt (A).

Generelt:

- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig går frem hvilke metoder og mellomresultater som er anvendt.
- Sensuren faller i uke 23.

Oppgave 1

Gitt det lineære ligningssystemet

$$Ax = b, \tag{1}$$

hvor A er en $n \times n$-matrise og b er en vektor med lengde n.

a) La $\alpha \neq \frac{4}{5}$ være et kjent tall og la

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La β være et kjent tall, og la

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Finn løsningen til ligningssystemet (1) uttrykt med α og β med Gauss-eliminasjon med skalért, delvis pivotering. Angi antakelser du gjør underveis.

b) For hvilke verdier av α er vi garantert at Gauss–Seidel-iterasjonene konvergerer? Sammenligne med eventuelle antakelser fra oppgave **a)**.

c) La $\alpha = 5$ og $\beta = 1$. Utfør tre iterasjoner med Gauss–Seidel-metoden. La startvektoren være $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Oppgave 2

Anta at $y(x) = ax^2$, hvor a er en konstant som vi ikke kjenner. Vi har gitt x ulike verdier, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, og målt tilhørende verdier, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, for y.

a) Vis at a gitt ved

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$$

minimerer summen av kvadratiske avvik fra de målte verdiene.

b) Vi antar nå at $y(x) = b \sin^2 x$ og har gjort følgende observasjoner:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	0.0087	0.1335	0.7724	0.9839	0.8499	0.4166	0.1043

Hvilken verdi vil du gi b?

Oppgave 3

Gitt den ordinære differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

a) Forklár ideen bak Eulers metode for løsning av ordinære differensialligninger. Hva skiller Taylor-rekke-metoder fra Runge–Kutta-metoder?

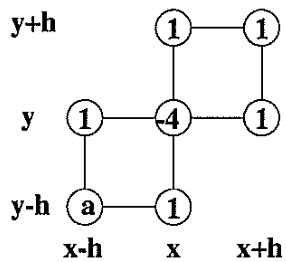
b) Hva mener vi med en metodes orden?

c) La

$$f(t, x) = 1 - t^2 - x^2 \qquad \text{og} \qquad x(0) = 0.$$

Finn en tilnærming til $x(1)$ ved å bruke Eulers (eksplisitte) metode med en skrittlengde på $h = 0.2$.

Oppgave 4
Du ønsker å løse Laplace-ligningen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ på et område i planet. En kollega foreslår at du bruker stensilen



med samme nettstørrelse h i både x- og y-retning.

Hvilken verdi må du velge for **a** for å få høyest mulig orden på stensilen? Hvilken orden oppnår du maksimalt?

Oppgave 5
Vi ønsker i denne oppgaven å finne en tilnærmelse til integralet

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Bruk Simpsons formel med to like delområder til å beregne en tilnærming til integralet I. Bruk videre Simpsons formel med fire like delområder. Hva får du nå?

b) Hvilken test ville du brukt for å avgjøre om nøyaktigheten til tilnærmelsen oppnådd i området er mindre enn ε (altså ha et utgangspunkt for å styre en adaptiv prosess)?

Hva ville du gjort dersom den foreskrevne nøyaktigheten var $\varepsilon = 0.01$?

Oppgave 6
En funksjon f er kjent i tre punkt:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.5	0.2762
1	1.5	0.2027
2	2.0	0.6323

a) Finn polynomet med lavest mulig grad som interpolerer f i de tre punktene. Bruk polynomet til å finne tilnærmelser til $f(0.75)$ og $f(1.0)$.

b) Hva kan du si om feilen til interpolasjonspolynomet i punktet $x = 1.5$?