**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Fagleg kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (93542)
Arne Marthinsen (900 46025)

EKSAMEN I FAG SIF5040 NUMERISKE METODER

Fredag 30. mai 2003
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Alle trykte og handskrevne hjelpemidler tillatt (A).

Generelt:

- Besvarelsen skal innehalde så mange mellomrekninger at det tydeleg går frem hvilke metoder og mellomresultater som er anvendt.
- Sensuren faller 20. juni 2003.

Oppgåve 1 Eit problem er diskretisert og det resulterende lineære likningssystemet skrives som

$$Ax = b, \tag{1}$$

kor A er ei $n \times n$-matrise og b og x er vektorer med lengde n.

Forklar kort og konsist, gjerne ved bruk av figurer, kva Jacobi- og Gauss-Seidel-iterasjon er og kva som er forskjeller og likheter ved dei to metodene.

Oppgåve 2 Vi ønskjer å integrere den ordinære differensialligningen

$$x'' = tx,$$

over intervalet $t_{\text{start}} = 0$ til $t_{\text{slutt}} = 1$ med startverdiene $x(0) = 0$ og $x'(0) = 1$.

a) Skriv om problemet til eit system av førsteordens likninger. Gjør videre systemet om til eit autonomt system.

b) Integrer systemet fra $t_{\text{start}} = 0$ til $t_{\text{slutt}} = 1$ med skrittlengde $h = 0.5$. Bruk den andreordens Runge–Kutta-metoden som er gitt ved

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} f(t,x) + \frac{h}{2} f(t+h, x+hf(t,x))$$

eller ekvivalent

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

med

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t,x), \qquad \text{og} \\ K_2 &= hf(t+h, x+K_1). \end{aligned}$$

Vis mellomregningene.

c) Anta at du skulle løyst problemet med ein implisitt metode, eksempelvis implisitt Eulers metode.

Hvilke utfordringer møter du nå, som du ikkje hadde for den eksplisitte metoden i **b)**? Korleis kan utfordringene løses? Forklar hvilke fordeler bruk av implisitte metoder kan ha.

Oppgåve 3 Vi ønskjer å bruke Newtons metode for å finne ein tilnærmelse til $\sqrt{p}$.

a) Vis at iterasjonsskjemaet for Newtons metode i dette tilfellet kan skrives som

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{p}{x_n}\right).$$

b) Vi ønskjer nå å berekne ein tilnærmelse til $\sqrt{2}$. Bruk $x_0 = 1$ som startverdi og iterer inntil du har 9 korrekte siffer i svaret. Kva seier det du observerer om konvergenshastigheten til metoden?

c) Korleis ser iterasjonsskjemaet ut for sekantmetoden i dette tilfellet?

Oppgåve 4

a) Bruk sammensatt trapesmetode med $h = 0.5$ til å berekne integralet

$$\int_2^{4.5} \sin x \, dx.$$

b) Gi ein øvre grense for feilen. Forklar korleis estimatet fremkommer.

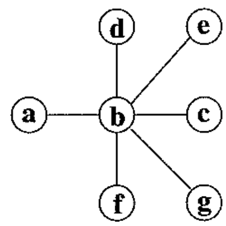
Oppgåve 5 Eksisterer det reelle a, b, c og d slik at funksjonen

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + x^2 + cx, & -1 \le x \le 0 \\ bx^3 + x^2 + dx, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

er ein naturlig kubisk spline som interpolerer funksjonen $|x|$ i knutepunktene -1, 0 og 1?

Vis tydelig hvilke krav du stiller.

Oppgåve 6 Anta at stensilen



er nyttig i visse sammenhenger.

Vi anvender denne stensilen for diskretisering av Poisson-problemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = K(x, y)$$

i eit rektangulært område Ω i to dimensjoner. Funksjonen $u(x, y)$ tar verdien $G(x, y)$ på randen av Ω.

a) Angi ein naturleg nummerering av knutepunktene i det diskretiserte området Ω.

Hvilken form får systemmatrisen, A, i det resulterende lineære ligningssystemet $Ax = b$?

Korleis bør dette systemet lagres i ein datamaskin?

b) Korleis ser høgresiden i ligningsystemet ut?