MA2501 Numeriske metoder

Eksempler fra forelesningen 25.01.

Dette notatet kommer som et supplement til forelesningen 25.01, og utdyper noen av eksemplene gitt der.

Gitt følgende funksjoner, alle på intervallet $[0, 1]$.

$$g(x) = \cos(x) \tag{1}$$
$$g(x) = \cos(2x) \tag{2}$$
$$g(x) = e^{x-1} - \frac{1}{10} \tag{3}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 1 \tag{4}$$

I hvert tilfelle vil vi se om vi kan garantere eksistens og entydighet av et fikspunkt for g, og om fikspunktiterasjonene vil konvergere. Til dette brukes resultatene fra notatet om fikspunktiterasjoner, spesielt Teorem 1.

De teoretiske resultatene kan illustreres ved bruk av programmet `fiksgraf`.

Vi kan umiddelbart konstatere at alle er kontinuerlige på $[0, 1]$. Ellers kan vi si

1. $g(x) = \cos(x)$.

   i) g er monotont avtagende på $[0, 1]$, altså vil

   $$g(x) \in [\cos(1), \cos(0)] = [0.54, 1] \subset [0, 1].$$

   Betingelse *i)* i Teorem 1 er oppfylt, og det fins et fikspunkt.

   ii) $g'(x) = -\sin(x)$ er monotont avtagende på $[0, 1]$, slik at

   $$g'(x) \in [-\sin(1), -\sin(0)] = [-0.84, 0]$$

   og betingelse *ii)* er oppfylt med $\rho = 0.84$. Vi er dermed garantert konvergens for alle startverdier i $[0, 1]$.

2. $g(x) = \cos(2x)$.

   i) g er fortsatt monotont avtagende i intervallet, dvs. at

   $$g(x) \in [\cos(0), \cos(2)] = [1, -0.4161]$$

   og betingelse *i)* er ikke oppfylt. Imidlertid er det som en av dere påpekte, tilstrekkelig at $g(a) \geq a$ og $g(b) \leq b$ for å sikre eksistens av et fikspunkt (det er den betingelsen som er benyttet i beviset av Teorem 1).

Siden *i)* uansett ikke er oppfylt, kan vi ikke bruke Teorem 1 for å vise konvergens. Imidlertid kan vi bruke Korrolær 2 og `fiksgraf`. Ved å studere grafen gitt av `fiksgraf` ser vi at r må ligge i intervallet $[0.4, 0.6]$. Da får vi

$$|g'(x)| = 2\sin(2x) \in [2\sin(0.8), 2\sin(1.2)] = [1.43, 1.82].$$

Vi kan trygt anta at $|g'(r)| > 1$, og iterasjonene vil ikke konvergere mot fikspunktet.

3. $g(x) = e^{x-1} - 1/10$.

   i) $g(x)$ er monotont økende, og $g(x) \in [0.26, 0.9] \subset [0, 1]$, dvs. vi har et fikspunkt.

   ii) $|g'(x)| = |e^{x-1}| < 1$ for alle $x \in (0, 1)$. Dvs. fikspunktet er entydig, og iterasjonene konvergerer mot det for startverdier innenfor intervallet.

   (g har også et fikspunkt nær 1.41, altså utenfor $[0, 1]$. Se hva som skjer om du velger startverdi nær dette fikspunktet.)

4. $g(x) = 0.5e^{2x} - 1$.

   i) g er monotont økende, så $g(x) \in [-0.5, 2.69]$ for alle $x \in [0, 1]$. Så *i)* er ikke oppfylt.

   Imidlertid vil det igjen være tilstrekkelig for eksistens av et fikspunkt at $g(a) \leq a$ og $g(b) \geq b$ så lenge g er kontinuerlig på $[a, b]$. (Vis det!)

   ii) Vi har at $|g'(x)| = e^{2x} > 1$ for alle $x \in (0, 1)$, iterasjonene vil ikke konvergere mot noe fikspunkt i $[0, 1]$.