MA2501 Numeriske metoder

Øving 10

Veiledning: 13/4

Oppgave 1

Gitt ligningen

$$x'' + x = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0, \qquad t = [0, 10] \tag{1}$$

Den eksakte løsningen er gitt som $x(t) = \cos(t)$, slik at løsningen i faseplanet (x, x') danner en sirkel. Dette er selvsagt en egenskap vi ønsker at den numeriske løsningen skal beholde.

a) Skriv om ligningen til et system av 1. ordens differensialligninger (se kap. 11.2 i C&K).

b) Løs systemet vha. av (forlengs) Eulers metode. Tegn også opp løsningen i faseplanet. Hva skjer? Prøv med litt ulike valg av skrittlengder, og se hvordan dette påvirker løsningen.

c) Gjør det samme som i bunkt b), men bruk baklengs Euler i stedet ($x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1})$). Hvordan oppfører løsningen seg nå.

d) Prøv til slutt å ta annenhvert skritt med de to metodene. Bedrer det resultatet?

e) La $x'(t) = y(t)$. Vis at den eksakte løsningen av (1) kan skrives som

$$\begin{bmatrix} x(t_i + h) \\ y(t_i + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) \\ -\sin(h) & \cos(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{bmatrix}$$

Bruk dette til å vise at $\|[x(t_i+h), y_(t_i+h)]\|_2 = \|[x(t_i), y_(t_i)]\|_2$ uavhengig av h.

f) Tilsvarende kan et skritt med forlengs Eulers metode anvendt på (1) skrives som

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Finn r og θ, og bruk dette til å forklare det du observerte i b).

g) Gjenta oppgaven i f) for baklengs Euler.

h) Forklar til sist hvorfor resultatene ble mye bedre ved å alternere mellom forlengs og baklengs Euler.

Oppgave 2

Gitt et system av ordinære differensialligniner,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Et skritt med en s-nivå Runge-Kutta metode for denne ligningen er gitt av

$$\mathbf{K}_i = h\mathbf{F}(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{K}_j), \qquad i = 1, \cdots, s$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{K_i}$$

Den enkelte metode er definert ved koeffisientene c_i, a_{ij} og b_i. Det er vanlig å skrive disse opp i et Butcher-tablå

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s. \end{array}$$

En metode er *eksplisitt* dersom $a_{ij} = 0$ for $j \geq i$, ellers er den implisitt.

Tablået for henholdsvis forlengs og baklengs Euler blir

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}.$$

a) Den sammensatte metoden i oppgave 1d) kan beskrives som to ulike Runge-Kutta metoder,avhengig av om vi velger forlengs eller baklengs Euler først. Vis hvordan, og finn Butcher-tablået til de to metodene.

b) Hvilken orden har de to metodene (se utdelt notat om Runge-Kutta metoder).

Oppgave 3

Vis at en eksplisitt Runge-Kutta metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s.
Hint: Bruk testligningen $x' = x,\ x(0) = 1$.