

MA2501 Numeriske metoder

Øving 4

Veiledning: 9/2, 08.15 - 10.00

Dersom oppgave-settet blir i største laget, så gjør oppgavene uten ★-merking i første omgang.

Oppgave 1

s. 161-162, problem 1,3,4, og s. 165, problem 27.

Oppgave 2

s. 178, problem 13.

Oppgave 3

s. 179, computer problem 10.

Plott $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ for $-1 \leq x \leq 1$ i de tre tilfellene:

$$\begin{array}{ll} x_i = \cos[(2i+1)\pi/(2n+2)] & i = 0, \dots, n \\ x_i = \cos(i\pi/n), & i = 0, \dots, n \\ x_i = -1 + 2i/n, & i = 0, \dots, n. \end{array}$$

Bruk gjerne vedlagt funksjon `w.m.` I så fall finner du plottet f.eks. ved

```
>> n = 3
>> i = [0:n]
>> x = cos((2*i+1)*pi/(2*n+2))
>> w(x,-1,1,'b');
```

Hint: Dersom du ønsker å se flere plott på samme figur, bruk `hold` - kommandoen.

Oppgave 4

s. 179, computer problem 1, 2. Bruk Matlabs `polyval` og `polyfit`.

Tegn plott av $f(x)$ og $p(x)$.

I oppgavene i boka brukes 21 noder. Prøv med 6 og 11 noder også.

Oppgave 5*

Gitt distinkte noder $x_0, x_1, \dots, x_n$. Finn et polynom av lavest mulig grad som tilfredsstiller

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = v_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

Denne formen for interpolasjon kalles *Hermite-interpolasjon*.

- Hvorfor er det rimelig å anta at $p(x)$ vil være av grad mindre eller lik $2n + 1$?
- Vis at $p(x)$ gitt ved

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n v_i B_i(x)$$

tilfredsstiller (1) dersom $A_i(x)$ og $B_i(x)$ må oppfylle betingelsene

$$\begin{aligned} A_i(x_j) &= \delta_{ij}, & B_i(x_j) &= 0 \\ A'_i(x_j) &= 0, & B'_i(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

hvor $\delta_{ij} = 1$ hvis $i = j$, 0 ellers.

- La $\ell_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ være kardinalfunksjonene. Vis at følgende polynomer tilfredsstiller betingelsene ovenfor:

$$\begin{aligned} A_i(x) &= [1 - 2(x - x_i)\ell'_i(x_i)]\ell_i^2(x), & i &= 0, \dots, n \\ B_i(x) &= (x - x_i)\ell_i^2(x) \end{aligned}$$

- Bruk dette til å finne et 3.grads polynom som tilfredsstiller $p(1) = 1$, $p(2) = 14$, $p'(1) = 4$, $p'(2) = 24$.

Oppgave 6*

- a) Anta at du har allerede funnet et polynom $p_n(x)$ av grad mindre eller lik n , som interpolerer datapunktene $(x_i, y_i)_{i=0}^n$. Du ønsker så å legge til et ekstra punkt (x_{n+1}, y_{n+1}) . Du kan forutsette at alle nodene er distinkte. Finn polynomet q slik at det nye interpolasjonspolynomet kan skrives som

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + q(x)$$

- b) Bruk dette til å finne polynomene p_0 , p_1 og p_2 som interpolerer hhv. det første, de to første og så alle tre punktene gitt ved

x	1	2	3/2
y	1	5	11/4