Hovedemner

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- Funksjonsapproksimasjon
  - Polynominterpolasjon
  - Splines
- Lineæralgebra
  - LU-faktorisering
  - Egenverdier (potensmetoden)
- Derivasjon og integrasjon
- Differensialligninger
  - Ordinære — RK-metoder
  - Partielle — Differensemetoder

Ikke-lineære ligninger

- Newtons metode (systemer og skalare lign)

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta\mathbf{x}^{(k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Intervallhalvering (skalare lign)
- Fikspunktiterasjon (systemer og skalare lign)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Konvergent fra vilkårlig $\mathbf{x}^{(0)}$ dersom $\|J\| < 1$. Spesielt for skalare lign: $x_{k+1} = f(x_k)$, konvergent dersom $|f'(x)| < 1$. Feilestimat

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|J\|^k}{1 - \|J\|} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

Lineære ligninger

Metoder for ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er invertibel og $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Direkte metoder (Gausseliminasjon) med og uten pivotering
- Iterative metoder

$$Q\mathbf{x}^{(k+1)} = (Q - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}.$$

  Konvergent fra vilkårlig $\mathbf{x}^{(0)}$ når $\rho(\mathcal{G}) = \rho(I - Q^{-1}A) < 1$.
  $\|\mathcal{G}\| < 1$ tilstrekkelig.
  Feilestimat:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathcal{G}\|^k}{1 - \|\mathcal{G}\|} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

Polynominterpolasjon

Gitt data

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{array}.$$

Finn $p \in \boldsymbol{P}_n$ slik at $p(x_i) = f(x_i)$ for alle $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Lagrangeform

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Newtonform

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Uttrykk for feilen:

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Derivasjon

Tar utgangspunkt i Taylorutviklingen

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \cdots$$

Lager "differenseformler" som tilnærmer de ønskede deriverte:

- Førstederivert

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi)$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

- Andrederivert

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

- Richardsonekstrapolasjon

Integrasjon, $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

- Trapesformelen, $T_n(f)$, skrittlengde $h = (b-a)/n$

$$T_n(f) = h\big(\tfrac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \tfrac{1}{2}f(b)\big)$$

- Simpsons formel, $S_{2m}(f)$

$$S_{2m}(f) = \tfrac{h}{3}\big(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih)\big)$$

- Rombergintegrasjon

Feiluttrykk

$$I(f) - T_n(f) = -\tfrac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$$
$$I(f) - S_{2m}(f) = -\tfrac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Ordinære differensialligninger

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

- Taylormetoder
- Runge–Kuttametoder

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{k}_j), \quad i = 1, \ldots, s$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i$$

- Flerskrittsmetoder

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \mathbf{f}(x_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j}), \quad \alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$$