MA2501 Numeriske metoder

Øving 3

Veiledning: 9 februar

Dersom oppgavesettet blir i største laget bør du prioritere oppgavene som ***ikke*** er merket med en stjerne (*).

Oppgave 1

a) Finn Lagrangeformen av interpolasjonspolynomet av lavest mulig grad som interpolerer tabellen

x	0	2	3	4
y	7	11	28	63

b) (*) Finn og plott kardinalfunksjonene $L_i(x)$ basert på interpolasjonsnodene -1, 1, 3 og 4.

c) Beregn de dividerte differensene og Newtonformen av interpolasjonspolynomet som interpolerer tabellen

x	-1	1	3	5
$f(x)$	2	-4	6	10

d) (*) Verifiser at polynomene

$$p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21 \text{ og } q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3$$

begge interpolerer tabellen

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	6	47

Hvorfor motsier ikke dette entydighetsteoremet?

e) Løs "Problem" **4.1.27** på side **165**.

Oppgave 2

Løs "Problem" **4.2.13** på side **178**.

Oppgave 3

Plott funksjonen $w_n(x)$, gitt ved

$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i),$$

for $-1 \leq x \leq 1$ for hvert av de tre tilfellene

- $x_i = \cos\big((2i+1)\pi/(2n+1)\big)$ — "Tsjebysjevnoder"
- $x_i = \cos(i\pi/n)$
- $x_i = -1 + 2i/n$

Her er $i = 0, 1, \ldots, n$ i hvert tilfelle. Bruk gjerne den vedlagte MATLAB-funksjonen `w` (implementert i filen `w.m`). I såfall kan du for $n = 3$ plotte $w_n(t)$ basert på Tsjebysjevnodene som følger

```
>> n = 3
>> i = 0:n
>> x = cos((2*i + 1)*pi / (2*n + 2))
>> [t, y] = w(x, [-1, 1])
>> plot(t, y, 'b-', 'LineWidth', 2)
>> grid on
```

Oppgave 4*

Løs "Computer problem" **4.2.1** og **4.2.2** på side **179**. Bruk MATLABs funksjoner `polyfit` og `polyval`. Tegn plott av $f(x)$ og $p(x)$.

I oppgavene i boken brukes 21 noder. Prøv de samme eksperimentene med 6 og 11 noder også.

Oppgave 5 – Hermiteinterpolasjon

Vi skal i denne oppgaven studere en form for interpolasjon som kalles *Hermiteinterpolasjon*.

Gitt $n+1$ distinkte noder $x_0, x_1, \ldots, x_n$ skal vi finne et polynom $p(x)$, av lavest mulig grad, som tilfredsstiller

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

for vilkårlige verdier y_i og v_i.

- Hvorfor er det rimelig å anta at $p(x)$ vil være av grad mindre enn eller lik $2n+1$, dvs. $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$?

- Vis at en funksjon $g(x)$ gitt ved

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} v_i B_i(x)$$

  tilfredsstiller betingelsene (1) dersom funksjonene $A_i(x)$ og $B_i(x)$ oppfyller

$$\begin{aligned} A_i(x_j) &= \delta_{ij}, \quad & B_i(x_j) &= 0, \\ A_i'(x_j) &= 0, \quad & B_i'(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

  hvor $\delta_{ij} = 1$ når $j = i$ og 0 ellers.

- La $L_i(x)$ være de vanlige kardinalfunksjonene i Lagrangeinterpolasjon. Vis at følgende polynomer tilfredsstiller (2) for alle $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x), \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

- Bruk dette til å finne et tredjegradspolynom $p(x)$ som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} p(1) &= 1, \quad & p(2) &= 14 \\ p'(1) &= 3, \quad & p'(2) &= 24. \end{aligned}$$