

MA2501 Numeriske metoder

Øving 7

Veiledning: 23 mars

Oppgave 1

Vi skal studere det lineære ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La \mathbf{x} være den eksakte og $\tilde{\mathbf{x}}$ en tilnærmet løsning av systemet. Definer *feilen* $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ og *residualen* $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}} = A\mathbf{e}$.

a) Vis at

$$\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (1)$$

der $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ er *kondisjonstallet* til matrisen A .

b) Løs «Problem» 7.1.5 på side 275 i C & K. Beregn også kondisjonstallet til matrisen og vis at ulikheten (1) er oppfylt.

c) Dette er en praktisk oppgave i MATLAB. Formålet med oppgaven er å demonstrere at avrundingsfeil kan utgjøre et alvorlig problem for løsning av et ligningssystem dersom koeffisientmatrisen er dårlig kondisjonert (dvs. $\kappa(A) \gg 1$).

Hilbertmatrisen er $n \times n$ -matrisen med elementer gitt ved

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

for $i, j = 1, \dots, n$. La \mathbf{x} være en selvvalgt vektor av dimensjon n og la A være Hilbertmatrisen av dimensjon $n \times n$. Sett $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$. Dermed har du et ligningssystem der du kjenner den eksakte løsningen. Løs systemet i MATLAB og finn en tilnærmet løsning $\tilde{\mathbf{x}}$.

Hvor stor er feilen og residualfeilen målt i maksnorm (uendelignorm),

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|?$$

Finn kondisjonstallet til matrisen. Utfør eksperimentet for $n = 5$, $n = 10$ og $n = 15$. Gjenta eksperimentet med en vilkårlig matrise.

Du kan ha nytte av MATLAB-funksjonene `hilb`, `norm` og `cond`.

Oppgave 2

Løs «Problem» 7.2.9 på side 293 og «Problem» 8.1.4 på side 332.

Oppgave 3

Løs «Problem» 8.2.3–8.2.9 på sidene 353–354.

NB! Fasitsvaret til «Problem» 8.2.9 er galt.

Oppgave 4

Gitt ligningssystemet på side 262 i C & K (i innledningen til kapittel 7). Dersom du forsøker å løse dette systemet med Jacobi, Gauss–Seidel eller SOR (med $0 < \omega < 2$), vil da iterasjonen konvergere?

Oppgave 5

Løs «Computer Problem» 8.2.3 og 8.2.4 på side 355.