MA2501 Numeriske metoder

Øving 8

Veiledning: 30 mars

Oppgave 1

La A være en reell $n \times n$-matrise ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

a) Vis at A er symmetrisk positiv definitt (SPD) hvis og bare hvis A er symmetrisk og alle egenverdiene er positive.

Hint: En symmetrisk matrise har reelle egenverdier og er ortogonalt diagonaliserbar.

b) Vis at hvis A er SPD så er alle As diagonalelementer positive.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere teoretiske aspekter ved Gauss–Seidels iterative metode anvendt på det lineære ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $n \times n$-matrisen A er *tridiagonal* (dvs. $a_{ij} = 0$ når $|i - j| > 1$) og gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

a) Finn et eksplisitt uttrykk for iterasjonsmatrisen $\mathcal{G}_{\mathrm{GS}}$ i Gauss–Seidels iterative metode med koeffisientmatrisen A.

b) Vis at $\|\mathcal{G}_{\mathrm{GS}}\|_\infty < 1$ og at Gauss–Seidels metode derfor vil konvergere for en vilkårlig startvektor.

c) La $n = 4$ og $\mathbf{b} = \left[1, 1, 1, 1\right]^{\mathrm{T}}$. Hvor mange GS-iterasjoner, k, trengs fra startverdien $\mathbf{x}^{(0)} = \left[0, 0, 0, 0\right]^{\mathrm{T}}$ for å få en feil $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ som er mindre enn $\varepsilon = 10^{-6}$.

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -6.00 & 3.00 & 3.50 \\ -5.00 & 3.50 & 2.75 \\ -10.00 & 3.00 & 7.50 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A ved hjelp av MATLABs innebygde funksjon `eig`.

b) Følgende MATLAB-setninger finner As største egenverdi (størst i betydningen «størst absoluttverdi») med tilhørende egenvektor.

```
A = [- 6.00, 3.00, 3.50; ...
     - 5.00, 3.50, 2.75; ...
    -10.00, 3.00, 7.50];
x = [1, 1, 0]';

for i = 1 : 30,
   i, y = A*x;
   lambda = y(1) / x(1)
   x = y / norm(y)
end
```

Modifiser denne koden slik at du finner den minste og den midterste egenverdien.

c) Bruk startverdien `x = [1, 1, 1]'` i stedet for `[1, 1, 0]'` i den opprinnelige koden. Hva observerer du og hvorfor skjer dette?

Øk antall iterasjoner fra 30 til 100. Hva skjer da og hvorfor?