

MA2501 Numeriske metoder

Øving 8

Veiledning: 30 mars

Oppgave 1

La A være en reell $n \times n$ -matrise ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$).

- a) Vis at A er symmetrisk positiv definitt (SPD) hvis og bare hvis A er symmetrisk og alle egenverdiene er positive.

Hint: En symmetrisk matrise har reelle egenverdier og er ortogonalt diagonaliserbar.

- b) Vis at hvis A er SPD så er alle A s diagonalelementer positive.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere teoretiske aspekter ved Gauss–Seidels iterative metode anvendt på det lineære ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $n \times n$ -matrisen A er *tridiagonal* (dvs. $a_{ij} = 0$ når $|i - j| > 1$) og gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

- a) Finn et eksplisitt uttrykk for iterasjonsmatrisen \mathcal{G}_{GS} i Gauss–Seidels iterative metode med koeffisientmatrisen A .
- b) Vis at $\|\mathcal{G}_{GS}\|_{\infty} < 1$ og at Gauss–Seidels metode derfor vil konvergere for en vilkårlig startvektor.

- c) La $n = 4$ og $\mathbf{b} = [1, 1, 1, 1]^T$. Hvor mange GS-iterasjoner, k , trengs fra startverdien $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ for å få en feil $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ som er mindre enn $\varepsilon = 10^{-6}$.

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -6.00 & 3.00 & 3.50 \\ -5.00 & 3.50 & 2.75 \\ -10.00 & 3.00 & 7.50 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A ved hjelp av MATLABs innebygde funksjon `eig`.
- b) Følgende MATLAB-setninger finner A s største egenverdi (størst i betydningen «størst absoluttverdi») med tilhørende egenvektor.

```
A = [- 6.00, 3.00, 3.50; ...
      - 5.00, 3.50, 2.75; ...
      -10.00, 3.00, 7.50];
x = [1, 1, 0]';

for i = 1 : 30,
    i, y = A*x;
    lambda = y(1) / x(1)
    x = y / norm(y)
end
```

Modifiser denne koden slik at du finner den minste og den midterste egenverdien.

- c) Bruk startverdien $\mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$ i stedet for $[1, 1, 0]^T$ i den opprinnelige koden. Hva observerer du og hvorfor skjer dette?
Øk antall iterasjoner fra 30 til 100. Hva skjer da og hvorfor?