MA2501 Numeriske metoder

Øving 9

Veiledning: 20 april

Oppgave 1

Gitt den andreordens ordinære differensialligningen med initialbetingelser

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 10]. \tag{1}$$

Den eksakte løsningen av (1) er $y(x) = \cos x$, hvilket betyr at den eksakte løsningen i «faseplanet» $(y(x), y'(x))$ er en sirkel. Dette er en egenskap vi ønsker å beholde også i den numeriske løsningen.

a) Skriv om ligningen til et system av førsteordens ordinære differensialligninger. Se kapittel **11.2** i C& K.

b) Løs systemet ved hjelp av Eulers metode. Tegn opp løsningen i faseplanet. Hva skjer? Prøv med litt ulike valg av skrittlengder og se hvordan dette påvirker løsningen.

c) Gjør det samme som i punkt **b**), men benytt nå «baklengs Euler» istedet. Baklengs Euler (også kalt «Relue») er definert ved at

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Hvordan oppfører løsningen seg nå?

d) Prøv til slutt å ta annethvert skritt med hver av de to metodene. Bedrer det resultatet?

e) La nå $u(x) = y(x)$ og $v(x) = y'(x)$. Vis at den eksakte løsningen av (1) kan skrives som

$$\begin{bmatrix} u(x_n + h) \\ v(x_n + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) \\ -\sin(h) & \cos(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_n) \\ v(x_n) \end{bmatrix}.$$

Bruk dette til å vise at $\| [u(x_n + h), v(x_n + h)]^\mathsf{T} \|_2 = \| [u(x_n), v(x_n)]^\mathsf{T} \|_2$ uavhengig av h.

Hint: For en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ er $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

f) Tilsvarende kan et skritt med Eulers metode anvendt på (1) skrives som

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Finn r og θ og bruk dette til å forklare observasjonene i punkt **b**).

g) Gjenta oppgaven i **f**) for baklengs Euler.

h) Forklar til sist hvorfor resultatene ble mye bedre ved å alternere mellom forlengs og baklengs Euler.

Oppgave 2

Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2}$$

Et skritt med en s-nivå Runge–Kutta-metode og skrittlengde h for (2) er gitt ved

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}(x_0 + c_i h, \mathbf{y}_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{k}_j), \quad i = 1, \ldots, s$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i.$$

En gitt metode er definert ved koeffisientene c_i, a_{ij} og b_i. Det er vanlig å skrive disse opp i et «Butchertablå» som

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}.$$

Tablået for henholdsvis forlengs og baklengs Euler blir

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}.$$

a) Den sammensatte metoden i oppgave 1**d**) kan beskrives som to ulike Runge–Kutta-metoder, avhengig av om vi velger forlengs eller baklengs Euler først. Vis hvordan og finn Butchertablået til de to metodene.

b) Hvilken orden har de to metodene. Se utdelt notat om Runge–Kutta-metoder for detaljer om orden.

Oppgave 3

Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s.
Hint: Bruk testproblemet

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$