

# MA2501 Numeriske metoder

## Øving 9

**Veiledning:** 20 april

### Oppgave 1

Gitt den andreordens ordinære differensialligningen med initialbetingelser

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 10]. \quad (1)$$

Den eksakte løsningen av (1) er  $y(x) = \cos x$ , hvilket betyr at den eksakte løsningen i «faseplanet»  $(y(x), y'(x))$  er en sirkel. Dette er en egenskap vi ønsker å beholde også i den numeriske løsningen.

- a) Skriv om ligningen til et system av førsteordens ordinære differensialligninger. Se kapittel 11.2 i C& K.
- b) Løs systemet ved hjelp av Eulers metode. Tegn opp løsningen i faseplanet. Hva skjer? Prøv med litt ulike valg av skrittlengder og se hvordan dette påvirker løsningen.
- c) Gjør det samme som i punkt b), men benytt nå «baklengs Euler» istedet. Baklengs Euler (også kalt «Relue») er definert ved at

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Hvordan oppfører løsningen seg nå?

- d) Prøv til slutt å ta annethvert skritt med hver av de to metodene. Bedrer det resultatet?
- e) La nå  $u(x) = y(x)$  og  $v(x) = y'(x)$ . Vis at den eksakte løsningen av (1) kan skrives som

$$\begin{bmatrix} u(x_n + h) \\ v(x_n + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) \\ -\sin(h) & \cos(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_n) \\ v(x_n) \end{bmatrix}.$$

Bruk dette til å vise at  $\| [u(x_n + h), v(x_n + h)]^\top \|_2 = \| [u(x_n), v(x_n)]^\top \|_2$  uavhengig av  $h$ .

**Hint:** For en vilkårlig vektor  $\mathbf{v}$  er  $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$ .

f) Tilsvarende kan et skritt med Eulers metode anvendt på (1) skrives som

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Finn  $r$  og  $\theta$  og bruk dette til å forklare observasjonene i punkt b).

g) Gjenta oppgaven i f) for baklengs Euler.

h) Forklar til sist hvorfor resultatene ble mye bedre ved å alternere mellom forlengs og baklengs Euler.

## Oppgave 2

Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2)$$

Et skritt med en  $s$ -nivå Runge–Kutta-metode og skrittlengde  $h$  for (2) er gitt ved

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}(x_0 + c_i h, \mathbf{y}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i.$$

En gitt metode er definert ved koeffisientene  $c_i$ ,  $a_{ij}$  og  $b_i$ . Det er vanlig å skrive disse opp i et «Butchertablå» som

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $c_1$    | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1s}$ |
| $c_2$    | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2s}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |          | $\vdots$ |
| $c_s$    | $a_{s1}$ | $a_{s2}$ | $\cdots$ | $a_{ss}$ |
|          | $b_1$    | $b_2$    | $\cdots$ | $b_s$    |

Tablået for henholdsvis forlengs og baklengs Euler blir

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}.$$

- a) Den sammensatte metoden i oppgave 1d) kan beskrives som to ulike Runge–Kutta-metoder, avhengig av om vi velger forlengs eller baklengs Euler først. Vis hvordan og finn Butchertablået til de to metodene.
- b) Hvilken orden har de to metodene. Se utdelt notat om Runge–Kutta-metoder for detaljer om orden.

## Oppgave 3

Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med  $s$  nivåer maksimalt kan være av orden  $s$ .

**Hint:** Bruk testproblemet

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$