MA2501 Numeriske metoder

Øving 10

Oppgave 1

Gitt initialverdiproblemet

$$x'''(x) = \mathrm{e}^{y(x)}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1.$$

a) Overfør problemet til et system av førsteordens differensialligninger.

b) Finn tilnærmelser til $y(0.1)$ og $y(0.2)$ ved en av RK-metodene

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Bruk skrittlengde $h = 0.1$. Sammenlign med den "eksakte" løsningen (beregnet ved hjelp av `ode15s` i MATLAB),

$$y(0.1) \approx 1.106070, \quad y(0.2) \approx 1.224594.$$

Oppgave 2

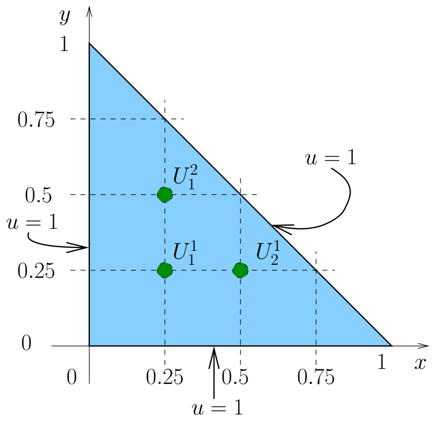
Vi skal numerisk tilnærme løsningen til den partielle differensialligningen

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 1$$

i et område $D \subset \mathbb{R}^2$ hvor funksjonen $u(x, y)$ er gitt på randen av D. Området D er bestemt ved

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\right\}$$

og vi har i tillegg at $u(x, y) = 1$ på randen av D. Vi bruker skrittlengde $h = 1/4$ i hver retning og lar $U_n^m \approx u(nh, mh)$. Se figur 1 for detaljer.



Figur 1: Området D med gridpunkter til oppgave 2.

a) Finn de tre ligningene som bestemmer U_1^1, U_2^1 og U_1^2 når sentraldifferenser benyttes i tilnærmingen av $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

b) Ligningssystemet i **a**) kan skrives på formen

$$A\mathbf{U} = \mathbf{b}$$

hvor $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ og $\mathbf{U}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer. La $\mathbf{U} = \left[U_1^1, U_2^1, U_1^2\right]^\mathsf{T}$ (tilsvarer *naturlig ordning* av de ukjente). Finn matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$. Løs ligningssystemet og bestem U_1^1, U_2^1 og U_1^2.