To punkts randverdiproblem

Anne Kværnø

April 28, 2009

I dette notatet diskuterer vi to punkts randverdiproblemer på formen

$$u' = f(x, u, u'), \quad a \le x \le b, \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta. \tag{1}$$

Denne ligningen har en unik løsning dersom f_u og $f_{u'}$ er kontinuerlige og oppfyller

$$\begin{array}{ll} i) & f_u(x, u, u') > 0 \\ ii) & |f_{u'}(x, u, u')| \le M \end{array}$$

for alle $u, u' \in \mathbb{R}$, og $a \le x \le b$. Vi kommer spesielt til å se på lineære ligninger,

$$u'' = p(x)u' + q(x)u = r(x), \quad a \le x \le b, \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \tag{2}$$

som dermed har en unik løsning dersom

$$\begin{array}{ll} i) & p(x),\ q(x) \text{ og } r(x) \text{ er kontinuerlige på } [a, b], \\ ii) & q(x) > 0. \end{array}$$

Slike ligninger kan løses ved hjelp av to helt ulike teknikker, *skytemetoder* og *differansemetoder.*

NB! Notatet er et supplement til læreboka kap. 14.

Skytemetoder.

I stedet for å løse randverdiproblemet (1) løser vi startverdiproblemet

$$u'' = f(x, u, u'), \qquad u(a) = a, \quad u'(a) = z. \tag{3}$$

Løsningen avhenger av en fri parameter z, så vi skriver løsningen som $u(x; z)$. Løsningen i endepunktet b skriver vi

$$\phi(z) = u(b; z).$$

Vi ønsker altså å finne en startverdi z slik at $\phi(z) = \beta$. Dette er en ikke-lineær ligning som i prinsippet kan løses med Newtons metode,

$$z_{k+1} = z_k - \frac{\phi(z_k) - \beta}{\phi_z(z_k)}, \qquad z = 0, 1, 2, \cdots .$$

der $\phi_z = \partial\phi/\partial z$, den deriverte av løsningen i b med hensyn på den ene startverdien z. Problemet er selvsagt å beregne denne. Igjen fins et par muligheter:

Sekantmetoden: La

$$\phi_z(z_k) \approx \frac{\phi(z_k) - \phi(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}}.$$

Sekantmetoden krever at vi velger to startverdier z_0 og z_1. Se for øvrig læreboka for detaljer.

Newtons metode: I dette tilfellet regner vi ut ϕ_z. Deriver (3) med hensyn på z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u''}{\partial z}(x; z) &= \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x; z), u'(x, z)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial z}.\end{aligned}$$

Men x er uavhengig av z så det første leddet forsvinner. Sett $v(x; z) = (\partial u/\partial z)(x; z)$ og anta at rekkefølgen av derivasjon mhp. x og z kan byttes om. *Den første variasjonsligningen* blir da:

$$v'' = f_{u'} v' + f_u v,$$

med startverdier $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$ (hvorfor). Verdien vi trenger er $\phi_z(z) = \partial u(b; z)/\partial z = v(b)$. Denne varianten av skytemetoden kan oppsummeres som følger:

Velg z_0, f.eks. $z_0 = (\beta - \alpha)/(\beta - \alpha)$.
for $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$,
  Løs følgende ligninger samtidig (eksakt eller numerisk) for $a \le x \le b$:

$$\begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), & u(a) &= \alpha, \quad u'(a) = z_k, \\ v'' &= f_{u'} v' + f_u v, & v(a) &= 0, \quad v'(a) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

  La $\phi(z_k) = u(b)$ og $\phi_z(z_k) = v(b)$, og

$$z_{k+1} = z_k - \frac{\phi(z_k) - \beta}{\phi_z(z_k)}.$$

end

Example 1. Gitt ligningen

$$u'' = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^2 - uu'\right), \qquad u(1) = 17, \; u(3) = \frac{43}{3}$$

Den første variasjonsligningen blir

$$v'' = -\frac{1}{8}\left(u'v + uv'\right)$$

Dette skrives om til et system av første ordens differensialligninger, og løses numerisk. Dette er gjort i vedlagte matlab-kode `skyt_ex1.m`.

Lineære differensialligninger: Skytemetoden kan forenkles betraktelig for lineære ligninger. Det er vel kjent at alle løsninger av (2) kan skrives som summen av en partikulærløsning og løsninger av den homogene ligningen ($r = 0$). En partikulærløsning og en homogen løsning finner vi ved å løse ligningene

$$\begin{aligned} u'' &= p(x)u' + q(x)u = r(x), \quad & u(a) = \alpha,\ u'(a) = z, \qquad & \text{med løsning } u_p(x) \\ v'' &= p(x)v' + q(x)v, & v(0) = 0,\ v'(0) = 1, \qquad & \text{med løsning } v(x). \end{aligned}$$

Dermed er

$$u(x) = u_p(x) + Cv(x)$$

en løsning av den inhomogene ligningen, og betingelsen $u(a) = \alpha$ er oppfyllt. Konstanten C bestemmes s.a. $u(b) = \beta$, det vil si $C = (\beta - u_p(b))/v(b)$.

Differansemetoder:

Differansemetoder kjennetegnes ved at vi ikke leter etter kontinuerlige løsninger av ligningen, men tilnærmelser til løsningen i gitte punkter. Følgende differanseformler (kap.4.3) er sentrale i utledningen av disse metodene:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''(\xi), \qquad u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\tau). \tag{5}$$

Andre differanseformler kunne også vært brukt, ideen er uansett den samme. Differansemetodene består nå av følgende skritt:

1. Legg et gitter over intervallet $[a, b]$, dvs: Velg en N, sett $h = (b-a)/N$, og la $x_i = a+ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$.

2. La $u_i = u(x_i)$, og la $U_i \approx u_i$ være den numeriske approksimasjonen.

3. I hvert gitterpunkt x_i, $i = 1, 2, \cdots, N-1$ erstattes de deriverte i (1)med differanseapproksimasjonene (5), samtidig som den eksakte løsningen erstattes av den numeriske. Resultatet er

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, U_i, \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}\right), \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{6}$$

   med $U_0 = \alpha$ og $U_N = \beta$.

4. Dette systemet av $N - 1$ ikke-lineære ligninger løses mhp. U_i , $i = 1, \cdots, N-1$ med Newtons metode.

La oss nå se litt mer spesifikt på den lineære differensialligningen (2). Anta at betingelsene for eksistens av en entydig løsning er oppfyllt, dvs. at $q(x) > 0$. I dette tilfellet ønsker vi svar på følgende:

1. Har ligningssystemet (6) en entydig løsning?

2. Kan vi si noe om feilen $e_i = u_i - U_i$?

I dette tilfellet kan differanseformelen (6) skrives som

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = p(x_i)\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + q(x_i)U_i + r(x_i), \qquad i = 1, \cdots, N-1,$$

eller

$$\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) U_{i-1} - \left(2 + h^2 q(x_i)\right) U_i + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) U_{i+1} = h^2 r(x_i), \quad i = 1, \cdots, N-1. \quad (7)$$

La $U = [U_1, \cdots, U_{N-1}]^T$. Da kan (7) skrives som $AU = b$, der

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-2} \\ & & & a_{N-1} & d_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} h^2 r(x_1) - a_1\alpha \\ h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ h^2 r(x_{N-2}) \\ h^2 r(x_{N-1}) - c_{N-1}\beta \end{bmatrix},$$

og

$$d_i = -\left(2 + h^2 q(x_i)\right), \quad a_i = \left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right), \quad c_i = \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right).$$

Den lineære ligningen (7) har en entydig løsning, og kan dessuten løses effektivt (se kap.7.3 i læreboka) dersom A er diagonaldominant, dvs. $|d_i| > |a_i| + [c_i]$ for $i = 1, \cdots, N-1$. La $P = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$, og velg h slik at betingelsen $hP/2 \leq 1$ er oppfyllt. I så fall er både a_i og c_i ikke-negative, og vi får

$$|d_i| - |a_i| - |c_i| = h^2 q_i > 0. \qquad (8)$$

A er diagonaldominant, så under betingelsen $hP/2 \leq 1$ har (7) en entydig løsning.

Så var det feilen. Hvis vi erstatter de deriverte i (2) med differanseformlene får vi:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\tau_i) = p(x_i)\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''(\xi_i)\right) + q(x_i)u_i + r(x_i),$$

eller

$$\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) u_{i-1} - \left(2 + h^2 q(x_i)\right) u_i + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) u_{i+1} = h^2 r(x_i) + g_i h^4 \qquad (9)$$

der $g_i = u^{(4)}(\tau_i) - p(x_i)u'''(\xi_i)$. Ta differansen mellom (7) og (9), og vi får

$$a_i e_{i-1} + d_i e_i + c_i e_{i+1} = h^4 g_i.$$

Anta nå at $hP/2 \leq 0$ er oppfyllt. La videre $G = \max_{x\in[a,b]} \left|u^{(4)}\right|/12 + P \cdot \max_{x\in[a,b]} |u'''|/6$ slik at $|g_i| \leq G$. La $\|e\|_\infty = \max_i |e_i|$ og velg indeksen j slik at $|e_j| = \|e\|_\infty$. Da har vi at

$$d_j e_j = -a_j e_{j-1} - c_j e_{j+1} + h^4 g_j \qquad \Rightarrow \qquad |d_j||e_j| \leq |a_j||e_{j-1}| + |c_j||e_{j+1}| + h^4|g_i| \leq |a_j||e_j| + |c_j||e_j| + h^4 G.$$

Bruk (8) og la $Q = \min_{x\in[a,b]} |q(x)]$, og resultatet blir at

$$\|e\|_\infty = \max_i |e_i| \leq \frac{G}{Q}h^2.$$