Chebyshev-polynomer.

March 2, 2009

Chebyshev-polynomene er definert ved

$$T_n(x) = \cos\left[n \arccos x\right], \qquad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots$$

De oppfyller følgende rekursjonsformel (se øving 4)

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2,3\cdots \end{aligned}$$

Chebyshev-polynomene har (blant mye annet) følgende egenskaper:

$$|T_n(x)| \le 1 \quad \text{og} \quad T_n(\hat{x}_i) = (-1)^i, \quad \hat{x}_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 0,1,\ldots n. \tag{1}$$

$$T_n(x_i) = 0, \qquad \text{for} \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots \tag{3}$$

La

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n$$

der $\tilde{\mathbb{P}}_n = \{p \in \mathbb{P}_n, \quad p(x) = x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_0\}$.

Theorem. [Minimax egenskap] *Polynomene $\tilde{T}_n(x)$ tilfredstiller*

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} \left|\tilde{T}_n(x)\right| \le \max_{x\in[-1,1]} |q(x)|, \quad \textit{for alle} \quad q \in \tilde{\mathbb{P}}_n.$$

Proof. Anta at $q \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ tilfredstiller

$$\max_{x\in[-1,1]} |q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La $r = \tilde{T}_n - q$, slik at $r \in \mathbb{P}_{n-1}$. Det betyr

$$r\left(\hat{x}_i\right) < 0 \quad \text{for } i \text{ odde}, \qquad r\left(\hat{x}_i\right) > 0 \quad \text{for } i \text{ like}, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

og r må ha minst en rot i i hvert av intervallene $(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1})$, $i = 0,1,\cdots,n-1$. Polynomet r av grad $n-1$ har altså minst n nullpunkter, noe som er umulig. $\square$