EKSAMEN I MA2501 NUMERISKE METODER
LØSNINGSFORSLAG

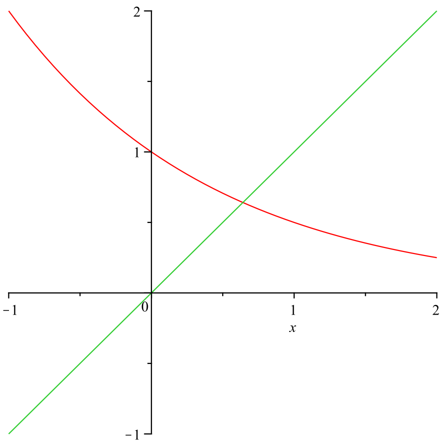
Oppgave 1

$$I(f) = \int_0^2 2^{-x} \approx S(0.5) = \frac{0.5}{3}\left(2^{-0} + 4 \cdot 2^{-0.5} + 2 \cdot 2^{-1} + 4 \cdot 2^{-1.5} + 2^{-2}\right) = 1.082107.$$

Øvre grense for feilen er gitt ved

$$|I(f) - S(0.5)| \leq \frac{2}{180} 0.5^2 \max_{\xi \in (0,2)} |2^{-\xi}(\ln 2)^4| = \frac{2}{180} 0.5^4 (\ln 2)^4 = 1.603 \cdot 10^{-4}$$

Oppgave 2 Siden startverdiene kan velges fritt, kan en liten figur kanskje være nyttig:



Prøver $x_0 = 0.5$, og får

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 0.707107, \quad x_2 = 0.612547, \qquad x_3 = 0.654041.$$

Uansett valg av x_0 vil $x_1 \geq 0$. Det betyr at $g(x)$ ikke har et negativt fikspunkt. Vi kan nå bruke Teorem 1 i notatet om fikspunktiterasjoner, med $[a,b] = [0,\infty]$. $g(x)$ er kontinuerlig deriverbar for alle x. Hvis $x \geq 0$ så er $g(x) \in [0,1]$ og $g'(x) \in [-\ln(2.0), 0] = [-0.6931, 0]$. Så g tilfredstiller alle betingelsene i Teoremet, dvs. g har et unikt fikspunkt, og fikspunktiterasjonene konvergerer mot dette.

Oppgave 3

a)

$$p(x) = -8x^2 - 9.2x + 1.2.$$

b) Sett $q(x) = p(x) + r(x)$. Siden $q(x)$ skal interpolere punktene i tabellen, må $r(x_i) = 0$ i de tre punktene. Vi ser altså etter en $r(x) = a_3 x(x - 0.75)(x - 1.0)$. Det gir

$$q'(x) = -16x - 9.2 + a_3(3x^2 - 3.5x + 0.75)$$

slik at kravet $q'(0.75) = -2.95$ gir $a_3 = 0.8$ og

$$q(x) = 0.8x^3 - 9.4x^2 + 9.8x + 1.2$$

c) Ta utgangspunkt i beviset for feilen i et vanlig interpolasjonspolynom (Teorem 1, kap. 4.2 i C&K).

Feiluttrykket er sant hvis x er en av nodene $0,\ 0.75$ eller 1.0. Velg derfor en fast x, som ikke er en node. Definer

$$w(t) = t(t-0.75)^2(t-1.0), \quad c = \frac{f(x) - q(x)}{w(x)}, \qquad \phi(t) = f(t) - q(t) - cw(t).$$

$\phi(t)$ har minst 4 nullpunkter, de tre nodene og x. Ved Rolles teorem har $\phi'(t)$ minst 3 nullpunkt, alle mellom nodene og x, *i tillegg til* et i $t = 0.75$, altså minst 4. Gjentatt bruk av Rolles teorem gir at $\phi^{(4)}(t)$ har minst 1 nullpunkt, la oss kalle det ξ. Nå er $q^{(4)}(t) = 0$, $w^{(4)}(t) = 4!$, slik at

$$f^{(4)}(\xi) - c \cdot 4! = 0$$

eller

$$q(x) - f(x) = -\frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) w(x)$$

Oppgave 4

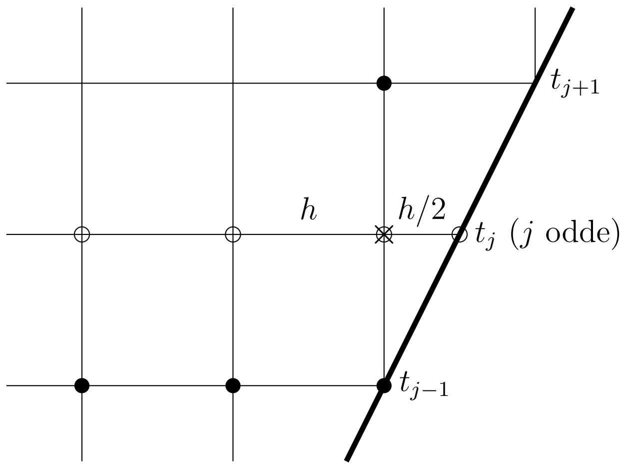
a) Med $x_i = ih$, $t_j = jk$ og $U_i^j \approx u(x_i, t_j)$ blir det eksplisitte skjemaet

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} \cdot x_i \cdot \left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j\right), \qquad i = 1, \cdots, N-1, \quad (N = 1/h).$$
$$U_0^j = 1, \quad U_N^j = 0, \quad U_i^0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right).$$

Dette gir

$$\begin{aligned} u(0.25, 0.025) &\approx U_1^1 = 0.909814, \\ u(0.5, 0.025) &\approx U_2^1 = 0.685577, \\ u(0.75, 0.025) &\approx U_3^1 = 0.365205. \end{aligned}$$

b) Med de oppgitt skrittlengdene, blir utfordringen å finne tilnærmelser til u og u_{xx} i det nest ytterste gitterpunktet for hver odde j.



Det fins flere muligheter. F.eks: For j odde, bruk interpolasjonspolynomet i punktene x_{N-2}, x_{N-1} og randpunktet for å finne en tilnærmelse til u og u_{xx} i x_N. Dvs. at vi bruker approksimasjonsformlene

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{-3f(x-2h) + 10f(x-h) + 8f(x+h/2)}{15}, \\ f''(x) &\approx \frac{12f(x-2h) - 20f(x-h) + 8f(x+h/2)}{15}. \end{aligned}$$

Algoritmen kan da skrives som:

$N = 1/h$.
for $j = 0, 1, 2, \cdots$

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} \cdot ih \cdot \left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j\right), \qquad i = 1, \cdots, N-1$$

if j like

$$U_N^{j+1} = \frac{8u(x_R(t_{j+1}), t_{j+1}) + 10U_{N-1}^{j+1} - 3U_{N-2}^{j+1}}{15}$$

else if j odde

$$U_N^{j+1} = U_N^j + \frac{k}{h^2} \cdot Nh \cdot \frac{12U_{N-2}^j - 20U_{N-1}^j + 8u(x_R(t_j), t_j)}{15}$$

$N = N + 1$

end

end

Ved å bruke resultatene fra punkt **a)** får vi

$$u(1.0, 0.025) \approx U_4^1 = 0.106355$$
$$u(1.0, 0.05) \approx U_4^2 = -0.0399014$$